КФ ПГУПС

# Методические указания
# к выполнению практических занятий
# по математике
# для специальности 23.02.06
# «Техническая эксплуатация
# подвижного состава железных
# дорог»

преподавателя Моревой Л. А.

2017

# Пояснительная записка

В результате выполнения практических занятий обучающийся должен обладать предусмотренными ФГОС по специальности СПО 23.02.06. «Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог»

следующими умениями, знаниями, которые формируют профессиональную компетенцию, и общими компетенциями:

У 1 - Решать прикладные технические задачи методом комплексных чисел;

У 2 – решать задачи с помощью теории графов

У 3 - применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

У 4 - работать с числовыми рядами;

У 5 - решать задачи по теории вероятностей;

У 6- применять методы численного дифференцирования и интегрирования.

З 1- основы теории комплексных чисел ;

З 2 - определения и правила построения графов;

З 3 - основы дифференциального и интегрального исчисления;

З 4 - основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;

З 5 - способы решения простейших видов дифференциальных уравнений;

З 6 - способы исследования числовых рядов;

З 7 - основные понятия теории вероятностей и математической статистики;

З 8 - основные численные методы.

ОК1-Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК2-Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК3-Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК4-Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК5-Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК6-Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК7-Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.

ОК8-Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК9-Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК1.3 - Выполнять требования нормативно-технической документации по организации эксплуатации машин при строительстве, содержании и ремонте дорог.

ПК 2.3 - Определять техническое состояние систем и механизмов подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования с использованием современных средств диагностики.

ПК 2.4 - Вести учетно-отчетную документацию по техническому обслуживанию и ремонту подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования.

ПК 3.3 - Составлять и оформлять техническую и отчетную документацию о работе ремонтно-механического отделения структурного подразделения.

ПК 3.4 - Рассчитывать затраты на техническое обслуживание и ремонт, себестоимость машино-смен подъемно-транспортных, строительных и дорожных машин .

ПК 3.5 - Определять потребность структурного подразделения в эксплуатационных и ремонтных материалах для обеспечения эксплуатации машин и механизмов.

**Практическое занятие 1**

**Тема:** Комплексные числа и действия над ними. Решение задачи для нахождения полного сопротивления электрической цепи переменного тока с помощью комплексных чисел.

**Цель:** научиться выполнять операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме; представлять комплексное число в тригонометрической форме; решать квадратные уравнения, не имеющие действительных корней.

**Теория: Полное сопротивление цепи переменного тока** электрической схемы, является совокупностью трёх основных составляющих –

- **активное сопротивление (омическое),**
- **индуктивное и**
- **емкостное.**

**Активное**. Активным называют сопротивление резистора. Единицей измерения сопротивления является Ом. Сопротивление резистора не зависит от частоты.

**Реактивное.** В разделе реактивные выделяют три вида сопротивлений:

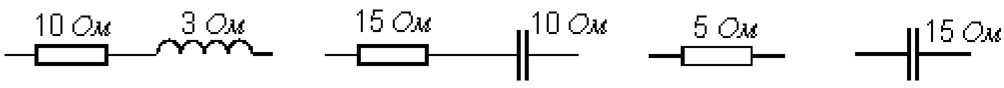
- индуктивное
- емкостное
- собственно реактивное.

**Комплексное сопротивление участка цепи** представляет собой комплексное число, вещественная часть которого соответствует величине активного сопротивления, а коэффициент при мнимой части – реактивному сопротивлению.

По виду записи комплексного сопротивления можно судить о характере участка цепи:

**R + j X — активно-индуктивное сопротивление;**
**R – j X — активно-емкостное.**

Примеры.




$z = 10 + j3$ $\quad$ $z = 15 - j10$ $\quad$ $z = 5$ $\quad$ $z = -j15$

**Ход работы**

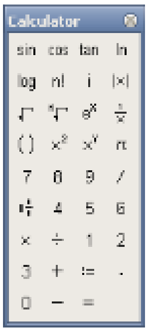
1. Произвести операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел Z и S.

2. Представить комплексное число Z в тригонометрической и показательной форме, возвести Z в двадцатую степень.

3. Решить квадратное уравнение на множестве комплексных чисел.

4. **на отлично решить уравнение $x^3$=ni (n-номер варианта по практическим занятиям)**

5. Проверить вычисления в ПО Mathcad.




- Написать фамилию, тему, вариант
- Задать действительные и мнимые части предложенных чисел

a:= b:= c:= d:=

- Записать числа в общем виде:

z:=a+b*i s:=c+d*i ( Символ i берется из калькулятора)

- Произвести вычисления

z= s=

z+s= z-s= z*s= z/s=

- Представить число z в тригонометрической и показательной формах, возвести его в 20 степень.

$$r := \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \phi := \mathrm{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad z := r \cdot (\cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi))$$

$$z1 := r \cdot e^{i \cdot \phi}$$

r= $\phi$= z= z1= $z^{20}$=

- Решить уравнение на множестве комплексных чисел

Записать уравнение через жирное равно, выделить синим углом переменную в любом месте, выполнить команду **Simbolics-Variable-Solve**

- Сверить результаты с вычислениями, убедиться, что вычисления разместились на 1 страницу, распечатать.

Задание

| № варианта | Первое комплексное число | Второе комплексное число | Квадратное уравнение |
|---|---|---|---|
| 1 | $Z=3+i$ | $S=5+2i$ | $x^2-4x+13=0$ |
| 2 | $Z=2+3i$ | $S=1-i$ | $x^2-2x+5=0$ |
| 3 | $Z=1+2i$ | $S=6+i$ | $x^2-4x+5=0$ |
| 4 | $Z=2+5i$ | $S=3-2i$ | $x^2-8x+25=0$ |
| 5 | $Z=4+i$ | $S=2+3i$ | $4x^2-4x+5=0$ |
| 6 | $Z=3+2i$ | $S=5-i$ | $x^2+6x+13=0$ |
| 7 | $Z=1+3i$ | $S=0,5+i$ | $x^2+2x+5=0$ |
| 8 | $Z=0,5+2i$ | $S= -1+i$ | $4x^2-8x+5=0$ |
| 9 | $Z=2+i$ | $S= -2+3i$ | $x^2-6x+25=0$ |
| 10 | $Z=1+5i$ | $S= -1-i$ | $x^2+8x+25=0$ |
| 11 | $Z=1+0,5i$ | $S= -5+2i$ | $x^2+6x+25=0$ |
| 12 | $Z=4+3i$ | $S=3+2i$ | $x^2-2x+10=0$ |
| 13 | $Z=1+4i$ | $S= -2+i$ | $x^2-8x+17=0$ |
| 14 | $Z=0,5+i$ | $S=3+i$ | $4x^2+4x+5=0$ |
| 15 | $Z=5+i$ | $S= -5-2i$ | $9x^2-6x+10=0$ |

**Вывод:**

а) Как производится сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел?

**б)** Как перевести комплексное число из алгебраической формы в тригонометрическую, показательную?

в) Формула Муавра

г) Какова особенность комплексных корней квадратного уравнения?

д) Как вычисляется полное сопротивление цепи переменного тока?

**Практическое занятие 2**

**Тема:** Построение графа по условию ситуационных задач

**Цель:** научиться строить графы по условию ситуационных задач.

**Ход работы**

1. Решить предложенные задачи по теории графов согласно варианту

| **1 Вар** | **2 Вар** | **3 Вар** | **4 Вар** | **5 Вар** | **6 Вар** | **7 Вар** | **8 Вар** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,4,7 | 2,5,8 | 3,6,9 | 1,6,8 | 2,4,7 | 3,5,9, | 1,5,8 | 2,6,9 |
| **9 Вар** | **10 Вар** | **11 Вар** | **12 Вар** | **13 Вар** | **14 Вар** | **15 Вар** | |
| 3,4,7 | 8,6,1 | 9,5,2 | 7,4,3 | 5,3,9 | 6,2,8 | 4,1,7 | |

**Задание 1**

Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.)

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | 2 | 4 | | | |
| B | 2 | | 1 | | 7 | |
| C | 4 | 1 | | 3 | 4 | |
| D | | | 3 | | 3 | |
| E | | 7 | 4 | 3 | | 2 |
| F | | | | | 2 | |

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и F (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

**Задание 2**

Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает что прямой дороги между пунктами нет.)

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | 4 | | | | |
| B | 4 | | 6 | 3 | 6 | |
| C | | 6 | | | 4 | |
| D | | 3 | | | 2 | |
| E | | 6 | 4 | 2 | | 5 |
| F | | | | | 5 | |

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и F (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

**Задание 3**

Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает что прямой дороги между пунктами нет.)

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | 5 | | | | |
| B | 5 | | 9 | 3 | 8 | |
| C | | 9 | | | 4 | |
| D | | 3 | | | 2 | |
| E | | 8 | 4 | 2 | | 7 |
| F | | | | | 7 | |

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и F (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

**Задание 4**

Путешественник пришел в 08:00 на автостанцию населенного пункта ЛИСЬЕ и обнаружил следующее расписание автобусов для всей районной сети маршрутов:

| Пункт отправления | Пункт прибытия | Время отправления | Время прибытия |
|---|---|---|---|
| ЛИСЬЕ | ЗАЙЦЕВО | 07:50 | 09:05 |
| СОБОЛЕВО | ЛИСЬЕ | 08:55 | 10:05 |
| ЕЖОВО | ЛИСЬЕ | 09:05 | 10:15 |
| ЗАЙЦЕВО | ЕЖОВО | 10:00 | 11:10 |
| ЛИСЬЕ | СОБОЛЕВО | 10:15 | 11:30 |
| ЛИСЬЕ | ЕЖОВО | 10:45 | 12:00 |
| ЗАЙЦЕВО | ЛИСЬЕ | 11:05 | 12:15 |
| СОБОЛЕВО | ЗАЙЦЕВО | 11:10 | 12:25 |
| ЕЖОВО | ЗАЙЦЕВО | 12:15 | 13:25 |
| ЗАЙЦЕВО | СОБОЛЕВО | 12:45 | 13:55 |

Проверить вычисления в программе ГРАФОАНАЛИЗАТОР, распечатать результаты

## Задание5

Путешественник пришел в 08:00 на автостанцию населенного пункта КАЛИНИНО и обнаружил следующее расписание автобусов:

| Пункт отправления | Пункт прибытия | Время отправления | Время прибытия |
|---|---|---|---|
| КАМЫШИ | КАЛИНИНО | 08:15 | 09:10 |
| КАЛИНИНО | БУКОВОЕ | 09:10 | 10:15 |
| РАКИТИНО | КАМЫШИ | 10:00 | 11:10 |
| РАКИТИНО | КАЛИНИНО | 10:05 | 12:25 |
| РАКИТИНО | БУКОВОЕ | 10:10 | 11:15 |
| КАЛИНИНО | РАКИТИНО | 10:15 | 12:35 |
| КАЛИНИНО | КАМЫШИ | 10:20 | 11:15 |
| БУКОВОЕ | КАЛИНИНО | 10:35 | 11:40 |
| КАМЫШИ | РАКИТИНО | 11:25 | 12:30 |
| БУКОВОЕ | РАКИТИНО | 11:40 | 12:40 |

Определите самое ранее время, когда путешественник сможет оказаться в пункте РАКИТИНО согласно этому расписанию.

## Задание 6

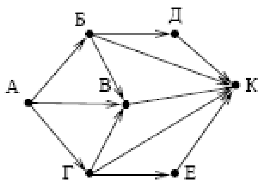
Путешественник пришел в 08:00 на автостанцию населенного пункта СЕРЫЙ БУГОР и обнаружил следующее расписание автобусов для всей районной сети маршрутов:

| Пункт отправления | Пункт прибытия | Время отправления | Время прибытия |
|---|---|---|---|
| Серый бугор | Красное | 9:50 | 11:10 |
| Красное | Зеленые мхи | 10:00 | 11:50 |
| Чёрная горка | Серый бугор | 10:15 | 12:00 |
| Чёрная горка | Зеленые мхи | 10:50 | 12:05 |
| Серый бугор | Зеленые мхи | 11:45 | 12:50 |
| Красное | Чёрная горка | 11:50 | 12:40 |
| Чёрная горка | Красное | 12:50 | 13:40 |
| Красное | Серый бугор | 13:00 | 14:20 |
| Серый бугор | Чёрная горка | 13:05 | 14:40 |
| Зеленые мхи | Чёрная горка | 13:15 | 14:30 |
| Зеленые мхи | Серый бугор | 14:45 | 15:50 |
| Зеленые мхи | Красное | 15:10 | 17:00 |

Определите самое раннее время, когда путешественник сможет оказаться в пункте ЧЕРНАЯ ГОРКА согласно этому расписанию.

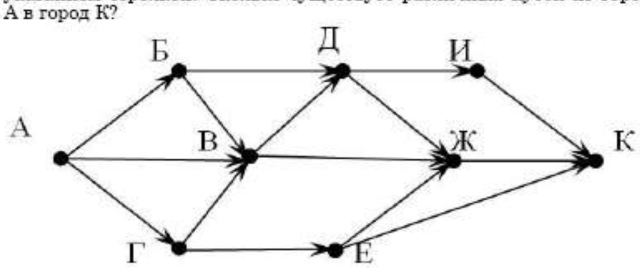
## Задание 7

На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



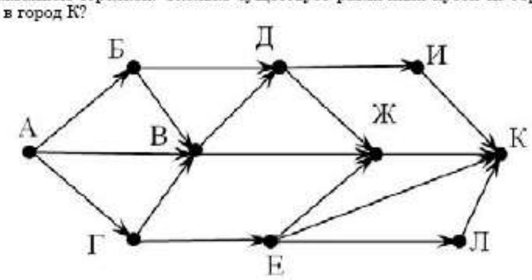

## Задание 8

На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?




## Задание 9

На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?




## Задание на «5»

1. У исполнителя Кузнечик две команды:
   1. прибавь 3,
   2. вычти 2.

   Первая из них увеличивает число на экране на 3, вторая – уменьшает его на 2 (отрицательные числа допускаются). Программа для Кузнечика – это последовательность команд. Сколько различных чисел можно получить из числа 1 с помощью программы, которая содержит ровно 5 команд?

2. Пяти проводникам (Дмитриевой, Григорьевой, Васильеву, Акимовой и Борисову) предложили работу по пяти разным маршрутам: Москва-Воронеж, Москва-Киев, Москва-Симферополь, Москва-Адлер и Москва-Одесса.

   - В Воронеж поеду я! – решительно заявила Дмитриева.

- Ну хорошо, согласна уступить подруге, если меня направят в Киев, - проявила великодушие Григорьева.
- …А меня - в Симферополь, - не уступила ей в великодушии Дмитриева.
- Хочу поехать в Адлер или Одессу, - сказал Васильев.

Акимова и Борисов выразили желание поехать в Одессу или Киев.
Удастся ли распределить маршруты так, чтобы все проводники были довольны?

## Вывод:

1) Определение графа и его элементов (вершины, рёбра).
2) Ориентированные и неориентированные графы: определения, сходства и различия.
3) Как определяется степень вершины графа?

### Практическое занятие 3

**Тема:** Решение задач на определение производной. Определение максимума мощности в цепи постоянного тока с применением производной.

**Цель:** Научиться дифференцировать функции, применять исследование функции с помощью производной к решению прикладных задач.

**Ход работы:** 1. Найти производную функции, используя определение производной (“по шагам”)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y=2x+1 | y=x$^2$-1 | y=3-x | y=x$^3$-2 | y=x$^2$+4 | y=-7x+12 | y=3-2x | y=-3+4x |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| y=0,35x+3 | y=2x+10 | y=x$^3$-3 | y=3x+5 | y=3x$^2$-2 | y=13+0,2x | y=-x+7 | |

2. Найти производную функции, используя таблицу производных:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y=5+cosx<br>y=3x$^4$+ln x y= $\frac{x^2}{x+1}$ | y=x$^2$-sin x<br>y=2$^x$+4x$^5$<br>y= $\frac{x}{x-1}$ | y=6x-2tg x<br>y= $\sqrt{x}$ +3$^x$<br>y= $\frac{x^3}{2+x}$ | y=x$^3$- cosx<br>y= $\sqrt{x}$ -5$^x$<br>y= $\frac{3x^2}{3+x}$ | y=5x$^2$-sinx<br>y=4$^x$+3x$^5$<br>y= $\frac{x^2}{3-2x}$ | y=x+ctg x<br>y= $\frac{1}{x}$ - $\sqrt{x}$<br>y= $\frac{x^2}{5+2x}$ | y=6+cosx<br>y=5$^x$+14x$^2$<br>y= $\frac{x^4}{2-3x}$ | y=x$^4$+sinx<br>y=3$^x$-2x$^6$<br>y= $\frac{5x^3}{2-x}$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| y=-2+sinx<br>y=4x$^3$-ln x<br>y= | y=x$^3$- cosx<br>y=7$^x$-6x$^3$ | y=2x+ctg x y= $\sqrt{x}$ - | y=0.3+cosx | y=6x-7tg x y= $\sqrt{x}$ | y=x$^2$-4sinx<br>y=5$^x$+14x$^2$ | y=5+cosx<br>y=-x$^6$+ $\sqrt{x}$ | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{-x^2}{5-2x}$ | y= $\frac{2x^2}{4+x}$ | $7^x$ y= $\frac{-x^2}{12-x}$ | y=$2x^7$ – $\sqrt{x}$ <br> y= $\frac{1+x^2}{2x}$ | +$9^x$ y= $\frac{3-x^3}{4x^2}$ | y= $\frac{2x^2}{12-3x}$ | y= $\frac{x^3+6}{2x}$ | |

3. Найти производную сложной функции

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y=cos(2x+9) | y=$(3x^6+4)^8$ | y=$e^{7x+2}$ | y=sin(-x+9) | y=$(2x^6-4)^3$ | y=$e^{-x+12}$ | y=cos(2x+9) | y=$(-x^5+4x)^8$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| y=$(-x^3-2x)^8$ | y=$e^{3x-7}$ | y=$(x^6-4x)^5$ | y=$e^{4x+8}$ | y=cos(x+9$x^6$) | y=$(4x^3+x)^7$ | y=$e^{2x-3}$ | |

4. Вычислить значение производной функции в указанных точках **y'(0)-? y'(-1)-? y'(1)-?**

Найти вторую производную функции

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y=7+4x-$x^2$ | y=$3x^4-x^2+1$ | y=$x^4+2x^2-2$ | y=$2x^3-x^2-2$ | y=7-2x-$x^3$ | y=$-x^4-2x^3+2$ | y=$x^4-3x^3-8$ | y=$3x^3+x^2-7$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| y=$-2+2x^3-x^2$ | y=6+3x-$2x^2$ | y=$x^4-3x^2+5$ | y=$x^3+7x^2-x$ | y=$2x^3-x^2-2$ | y=2+2x-$x^4$ | y=$x^4-6x^3+4$ | |

5. Закон движения материальной точки задан уравнение S(t).

Найдите ускорение через 2 минуты.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S(t)=$5t^2$-2t+3 | S(t)= 2+$3t^2$-4t | S(t)= $t^2$-8t-17 | S(t)=$5t^2$+12t+7 | S(t)=$2t^2$-t+23 | S(t)=$6t^2$+2t+3 | S(t)=$4t^2$+3t+1 | S(t)=$7t^2$+2t-2 |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| S(t)= 3-2t+$3t^2$ | S(t)= 2+$5t^2$-7t | S(t)= 1-3t+$7t^2$ | S(t)= 4+9t+$2t^2$ | S(t)=5+4t+$3t^2$ | S(t)=12-t+$9t^2$ | S(t)=-3+2t+$3t^2$ | |

6. **<u>На «отлично»</u>**

В электротехнике большое значение имеют задачи на поиск оптимального решения: расчет параметров электротехнических приборов, при которых в цепи будет наибольшая мощность. Мощность, потребляемая электронагревательным прибором, сопротивление которого равно R, находится по формуле:

$$P = \frac{\varepsilon^2 \cdot R}{(r+R)^2}$$

Электронагревательный прибор потребляет мощность от источника тока, ЭДС которого $\varepsilon$, а внутреннее сопротивление r.

Какое сопротивление должен иметь прибор, чтобы в нем выделялась максимальная мощность? Вычислить значение максимальной мощности.

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon$ | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 4 |
| **r** | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| $\varepsilon$ | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 7 | 7 | |
| **r** | 1 | 3 | 2 | 4 | 4 | 2 | 3 | |

1. 8**. Проверить вычисления в ПО Mathcad Подписать работу (фамилия, тема, вариант)**1. Задать функцию y(x) согласно варианту. Записать предел, вычислить его $\lim_{\Delta x \to 0} \left[ \frac{\left[5 - 2\cdot(x + \Delta x)^3\right] - \left(5 - 2\cdot x^3\right)}{\Delta x} \right] \rightarrow$

2. Вычислить производные функций согласно варианту. Записать функцию **y(x):=…**, скопировать ниже правую часть равенства, поставить курсор у аргумента x, выполнить команду

**Symbolics-Variable-Differentiate.**

3. Для задания **4** обозначить полученную производную новой функцией, например, **f(x)**. Вычислить значения **f(-1), f(0), f(1).**

4. По аналогии в заданиях **4** и **5** вычислить вторую производную.

5. Сверить результаты с собственными решениями.

6. Сохранить работу, распечатать.

Вывод:

1. Дать определение производной.
2. Какой физический и геометрический смысл имеет производная.
3. Напишите формулу производной сложной функции.
4. Дать определение критических точек.
5. Признаки точек максимума и минимума по первой производной.

## Практическое занятие 4

**Тема:** Нахождение площади фигуры между графиками. Вычисления геометрических, механических и физических величин с помощью интегрального исчисления при решении профессиональных задач.

**Цель:** Научиться интегрировать функции, находить площадь фигуры между двумя графиками, вычислять геометрические, механические и физические величины с помощью интегрального исчисления при решении профессиональных задач.

**Ход работы:** 1. Найти множество всех первообразных функции

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=-5x+3$ | $y=x^2-5x^4$ | $y=cos3x$ | $y=4x-2$ | $y=\frac{1}{2}x+x^4$ | $y=(2x+5)^5$ | $y=2-3x$ | $y=\frac{1}{x^3}+x$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| $y=(2-7x)^{10}$ | $y=\frac{1}{3}x-x^3$ | $y=\sin 4x$ | $y=x^3-2x^6$ | $y=-2x^3+3x$ | $y=\frac{1}{6}x^2-2x^3$ | $y=-3x^6+7x$ | |

2. Найти неопределенный интеграл $\int f(x)dx$

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=5+\cos x$<br>$f(x)=\frac{3}{5-x}$ | $f(x)=x^2-\sin x$<br>$f(x)=\frac{x}{x-1}$ | $f(x)=6x-\sqrt{x}$<br>$f(x)=\frac{5}{2+x}$ | $f(x)=x^3-\cos x$<br>$f(x)=\frac{3}{3+x}$ | $f(x)=5x^2-\sin x$<br>$f(x)=\frac{2}{3-2x}$ | $f(x)=x+\cos x$<br>$f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x}$ | $f(x)=6+\cos x$<br>$f(x)=\frac{6}{2-3x}$ | $f(x)=x^4+\sin x$<br>$f(x)=\frac{5}{2-x}$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| $f(x)=2+\sin x$<br>$f(x)=\frac{-7}{5-2x}$ | $f(x)=x^3-\cos x$<br>$f(x)==\frac{2}{4+x}$ | $f(x)=2x+\cos x$<br>$f(x)=\frac{-1}{12-x}$ | $f(x)=3+\sin x$<br>$f(x)=2x^7-\sqrt{x}$ | $f(x)=6x-\sin x$<br>$f(x)=\frac{2x}{4+x^2}$ | $f(x)=x^2-\sin x$<br>$f(x)=5^x+14x^2$ | $f(x)=1+\cos x$<br>$f(x)=x^6+\sqrt{x}$ | |

3. Вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\int_{-2}^{3} x dx$ | $\int_{0}^{5} x^2 dx$ | $\int_{2}^{3} x^3 dx$ | $\int_{1}^{5} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ | $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^3} dx$ | $\int_{1}^{4} \frac{32}{x^3} dx$ | $\int_{1}^{5} (x+3) dx$ | $\int_{-2}^{0} x^2 dx$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| $\int_{1}^{4} \frac{5}{x^2} dx$ | $\int_{-2}^{5} 3x dx$ | $\int_{0}^{4} \sqrt{x} dx$ | $\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2-x) dx$ | $\int_{0}^{4} x^4 dx$ | $\int_{3}^{4} \frac{2}{x^2} dx$ | $\int_{2}^{3} (5+x) dx$ | |

4. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\sqrt{x}$ $y=0$ $x=4$ | $y=\frac{1}{x^2}$ $y=0$ $x=1$ $x=2$ | $y=2x^2$ $y=x$ | $y=x^3$ $y=x^2$ | $y=\sqrt{x}$ $y=0$ $x=9$ | $y=\frac{2}{x^2}$ $y=0$ $x=1$ $x=3$ | $y=x^3$ $y=x$ | $y=3x^3$ $y=0$ $x=1$ $x=2$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| $y=x^2$ $y=2x$ | $y=6+3x$ $y=0$ $x=3$ $x=4$ | $y=x^4$ $y=x^3$ | $y=x^3$ $y=0$ $x=1$ $x=4$ | $y=x^2$ $y=x+2$ | $y=2x$ $y=x^2$ | $y=7x$ $y=x^2$ | |

5. Скорость движения материальной точки изменяется по закону согласно варианту. Найдите длину пути, пройденного телом за первые 3сек.

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(t)=5t^2-2t+3$ | $v(t)=2+3t^2-4t$ | $v(t)=t^2-8t-17$ | $v(t)=5t^2+12t+7$ | $v(t)=2t^2-t+23$ | $v(t)=6t^2+2t+3$ | $v(t)=4t^2+3t+1$ | $v(t)=7t^2+2t-2$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| $v(t)=3-2t+3t^2$ | $v(t)=2+5t^2-7t$ | $v(t)=1-3t+7t^2$ | $v(t)=4+9t+2t^2$ | $v(t)=5+4t+3t^2$ | $v(t)=12-t+9t^2$ | $v(t)=-3+2t+3t^2$ | |

**На «отлично»**

1. **Изучить теоретическую часть**
2. **Определить действующее значение переменного синусоидального тока, согласно варианту, используя приведённый в теории вывод**.

При расчётах и электрических измерениях широко применяется действующее значение переменного тока I.

Для его определения можно исходить из теплового действия переменного тока в электрической цепи. Количество теплоты, $\boxed{i = I_m \sin\omega t}$ выделенное синусоидальным током за время равное периоду T:

$$\boxed{Q = \int_0^T i^2 r dt = r\int_0^T i^2 dt}$$

Такое же количество теплоты в сопротивлении r за время T выделит

$$Q = I^2 rT \qquad r\int_0^T i^2 dt = I^2 rT \qquad \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2{}_{m*\sin^2\varpi t dt}} = I_m\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\varpi t dt}$$

постоянный ток I:

| | |
|---|---|
| **1** | 10 |
| **2** | 2 |
| **3** | 3 |
| **4** | 4 |
| **5** | 5 |
| **6** | 7 |
| **7** | 3 |
| **8** | 5 |
| **9** | 1 |
| **10** | 9 |
| **11** | 6 |
| **12** | 2 |
| **13** | 8 |
| **14** | 7 |
| **15** | 10 |

Известно, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Так как,

$$\int_0^T \sin^2\omega t dt = \int_0^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2}dt = \frac{1}{2}\int_0^T dt - \frac{1}{2}\int_0^T cos2\omega\, tdt = \frac{1}{2}T - \frac{1}{2\cdot 2\omega}\sin 2\omega t \Big|_0^T = \frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega}\sin\frac{4\pi}{T}t \Big|_0^T = \frac{T}{2}$$

$I = I_m\sqrt{\frac{1}{T}*\frac{T}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 * I_m$ Таким образом, действующее значение переменной синусоидального тока меньше его амплитудного значения в $\sqrt{2}$ раз.

Такое же соотношение справедливо для действующих значений синусоидального напряжения и ЭДС: $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$

**6. Проверить вычисления в ПО Mathcad:**

**Подписать работу: фамилия, тема, вариант**

1. Записать предложенную функцию, скопировать правую часть, выделить переменную курсором, выполнить команду **Symbolics-Variable-Integrate**

2. Записать неопределенный интеграл, вычислить его через символ «стрелка».

3. Записать определенный интеграл, вычислить его через символ «равенства».

4. Найти площадь фигуры между графиками:

- Построить в одной системе координат графики предложенных функций y(x) и g(x).
- Найти абсциссы точек пересечения, приравняв правые части через жирное равно и выполнив команду **Symbolics-Variable-Solve**.
- Вычислить определенный интеграл на полученном промежутке.

6. По аналогии выполнить задание 5

**Вывод:**

1. Дать определение первообразной функции
2. Написать формулу Ньютона-Лейбница для нахождения определённого интеграла
3. Геометрический смысл определённого интеграла
4. Дать определение криволинейной трапеции.
5. Написать формулы для нахождения действующих значений синусоидального тока, напряжения, ЭДС.

**Практическое занятие 5**

**Тема:** Выделение функции и аргумента из заданных переменных величин, установление физического смысла функции, производной от нее. Установление на основе известных сведений из физики, механики, электротехники зависимости между функцией, ее производной и аргументом. Определение типа составленного уравнения. Решение уравнения и поиски его общего и частного решения.

**Цель:** закрепить навыки в решении дифференциальных уравнений.

**Ход работы**

1. Найдите общее решение дифференциальных уравнений.

| № варианта | Первое дифференциальное уравнение | Второе дифференциальное уравнение | Третье дифференциальное уравнение |
|---|---|---|---|
| **1** | $\frac{dx}{y^2} = \frac{3dy}{x^2}$ | $(x + xy)y' = y - xy$ | $y'' - 5y' - 6y = 0$ |
| **2** | $\sqrt{y}dy = 3\sqrt{x}dx$ | $x + yy' = 0$ | $3y'' - 11y' + 6y = 0$ |
| **3** | $\sqrt{y}dx = \sqrt{x}dy$ | $y' = xy$ | $y'' - 16y' + 64y = 0$ |
| **4** | $dy = (3 - 4x)dx$ | $y' = xy^2$ | $9y'' + 6y' + 10y = 0$ |
| **5** | $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 8x + 1$ | $y' = -\frac{x}{y}$ | $2y'' - 7y' + 3y = 0$ |
| **6** | $\frac{dy}{x^2} = \frac{dx}{3y^2}$ | $y' = -\frac{y\cos x}{1 + y}$ | $2y'' + 3y' - 2y = 0$ |
| **7** | $\frac{dy}{dx} = \cos x - \sin x$ | $y' = 4x\sqrt{y}$ | $y'' - 8y' + 16y = 0$ |
| **8** | $\frac{dy}{dx} = 3\sin x$ | $xy' = y^2$ | $4y'' + 4y' + 5y = 0$ |
| **9** | $\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$ | $x(1 + y)y' = (1 - x)y$ | $y'' + 3y' - 10y = 0$ |
| **10** | $\frac{dy}{3\sqrt{x}} = \frac{dx}{\sqrt{y}}$ | $xy' + (x + 1)y = 0$ | $3y'' - 10y' + 3y = 0$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **11** | $\frac{1}{dx}=\frac{5\sin x}{dy}$ | $xy'+y^2=0$ | $y''+6y'+9y=0$ |
| **12** | $(8-9x)dx=dy$ | $y'=3xy$ | $y''-8y'+25y=0$ |
| **13** | $\sin x-\cos x=\frac{dy}{dx}$ | $-7yy'=x$ | $y''-3y'-10y=0$ |
| **14** | $\frac{dy}{dx}=7x^2-5x+2$ | $y'=8xy^2$ | $2y''-3y'-2y=0$ |
| **15** | $\frac{dx}{y^5}=\frac{7dy}{x^3}$ | $y'-xy=0$ | $y''+2y'+5y=0$ |

**В Mathcad**

- Записать уравнение через жирное равно (символ производной сочетание клавиш Ctrl+F7)
- Записать уравнение с разделенными переменными через жирное равно
- Взять неопределенный интеграл от обеих частей, выделить все выражение и нажать символ «Стрелочка»
- Записать общее решение

2. Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| $y''+3y'+2y=0$<br>y(0)=-1 $y'$(0)=3 | $y''+2y'+5y=0$<br>y(0)= 1 $y'$(0)=1 | $y''+2y'-5y=0$<br>y(0)=0 $y'$(0)=1 | $y''+2y'+2y=0$<br>y(0)=1 $y'$(0)=1 | $y''+4y'+7y=0$<br>y(0)=1 $y'$(0)=1 |
| **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| $y''+2y'-8y=0$<br>y(0)=4 $y'$(0)=-4 | $y''-2y'+y=0$<br>y(0)=4 $y'$(0)=2 | $y''-3y'+2y=0$<br>y(0)=2 $y'$(0)=3 | $y''+4y'+4y=0$<br>y(0)=1 $y'$(0)=-1 | $y''+4y=0$<br>y($\frac{\pi}{4}$)=1 $y'$($\frac{\pi}{4}$)=-2 |
| **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| $y''-y=0$<br>y(0)=0 $y'$(0)=1 | $y''-2y'-3y=0$<br>y(0)=8 $y'$(0)=0 | $y''-9y=0$<br>y(0)=2 $y'$(0)=6 | $y''-2y'+50y=0$<br>y(0)=1 $y'$(0)=1 | $y''-10y'+25y=0$<br>y(0)=2 $y'$(0)=8 |

3. **В Mathcad**

- Будем решать задачу с помощью функции Odesolve.
- Прежде чем вводить дифференциальное уравнение, введем ключевое слово
- Given, а затем - дифференциальное уравнение.
- При вводе дифференциального уравнения необходимо в скобках указать аргумент искомого решения и использовать знак символьного равенства.
- Следом за уравнением необходимо ввести начальное условие. При вводе начального условия, как и при вводе уравнения, следует использовать знак символьного равенства.
- Знак символьного равенства можно ввести щелчком по соответствующей кнопке в панели Evaluation.
- Знак символьного равенства можно ввести с клавиатуры, нажав одновременно клавиши <Ctrl> и <=>

- Построим график найденного решения y(x)
- Для того чтобы построить график решения y(x), щелкните в панели Graph по пиктограмме декартова графика, введите в помеченных позициях имена аргумента и функции и щелкните по свободному месту в рабочем документе вне выделяющей рамки

**4. на «отлично»**

- изучить *алгоритм решения задач на составление дифференциальных уравнений*

1.из переменных величин выделяют функцию и аргумент, устанавливают физический смысл функции и ее производной.
2.Используя известные сведения из физики, механики, электротехники, выражают зависимость между функцией, ее производной и аргументом (составляют дифференциальное уравнение)
3.определяют тип уравнения и находят общее решение
4.если даны начальные условия, то получают частное решение уравнения.

- *решить задачу из электротехники согласно алгоритму*

**Конденсатор емкостью Q включается в цепь с напряжением U и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после выключения.**

1. Сила тока I представляет собой производную количества электричества q, прошедшего через проводник, по времени , т.е.**I=**$\frac{dq}{dt}$ .В цепи действует электродвижущая сила **E**, равная разности между напряжением цепи **U** и напряжением конденсатора $\frac{q}{Q}$, т. е.**E=U-**$\frac{q}{Q}$**.** Согласно Закону Ома, **I=**$\frac{E}{R}$**.**Теперь можно составить уравнение $\frac{dq}{dt}=\frac{U-\frac{q}{Q}}{R}$ или $\frac{dq}{dt}+\frac{q}{QR}=\frac{U}{R}$
2. Это – линейное уравнение первого порядка. Его общее решение имеет вид **q=Ce**$^{-\frac{t}{QR}}$ **+UQ**.
3. По условию **q=0** при **t=0** и, значит, ________ т.е.С=______ . Таким образом, заряд конденсатора в момент t выражается формулой q=_______________.

**Выводы:**

1. Сформулируйте определение дифференциального уравнения.
2. Что является решением дифференциального уравнения?
3. Какое решение дифференциального уравнения называется общим решением?
4. Какое решение дифференциального уравнения называется частным решением?
5. Уравнение какого вида называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными?
6. Уравнение какого вида называется однородным дифференциальным уравнением второго порядка?

**Практическое занятие 2**

**Тема:** Построение графа по условию ситуационных задач

**Цель:** научиться строить графы по условию ситуационных задач.

**Ход работы**

2. Решить предложенные задачи по теории графов согласно варианту

| **1 Вар** | **2 Вар** | **3 Вар** | **4 Вар** | **5 Вар** | **6 Вар** | **7 Вар** | **8 Вар** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,4,7 | 2,5,8 | 3,6,9 | 1,6,8 | 2,4,7 | 3,5,9, | 1,5,8 | 2,6,9 |
| **9 Вар** | **10 Вар** | **11 Вар** | **12 Вар** | **13 Вар** | **14 Вар** | **15 Вар** | |
| 3,4,7 | 8,6,1 | 9,5,2 | 7,4,3 | 5,3,9 | 6,2,8 | 4,1,7 | |

**Задание 1**

Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.)

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | 2 | 4 | | | |
| B | 2 | | 1 | | 7 | |
| C | 4 | 1 | | 3 | 4 | |
| D | | | 3 | | 3 | |
| E | | 7 | 4 | 3 | | 2 |
| F | | | | | 2 | |

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и F (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

**Задание 2**

Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает что прямой дороги между пунктами нет.)

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | 4 | | | | |
| B | 4 | | 6 | 3 | 6 | |
| C | | 6 | | | 4 | |
| D | | 3 | | | 2 | |
| E | | 6 | 4 | 2 | | 5 |
| F | | | | | 5 | |

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и F (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

**Задание 3**

Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает что прямой дороги между пунктами нет.)

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | 5 | | | | |
| B | 5 | | 9 | 3 | 8 | |
| C | | 9 | | | 4 | |
| D | | 3 | | | 2 | |
| E | | 8 | 4 | 2 | | 7 |
| F | | | | | 7 | |

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и F (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

Проверить вычисления в программе ГРАФОАНАЛИЗАТОР, распечатать результаты

**Задание 4**

Путешественник пришел в 08:00 на автостанцию населенного пункта ЛИСЬЕ и обнаружил следующее расписание автобусов для всей районной сети маршрутов:

| Пункт отправления | Пункт прибытия | Время отправления | Время прибытия |
|---|---|---|---|
| ЛИСЬЕ | ЗАЙЦЕВО | 07:50 | 09:05 |
| СОБОЛЕВО | ЛИСЬЕ | 08:55 | 10:05 |
| ЕЖОВО | ЛИСЬЕ | 09:05 | 10:15 |
| ЗАЙЦЕВО | ЕЖОВО | 10:00 | 11:10 |
| ЛИСЬЕ | СОБОЛЕВО | 10:15 | 11:30 |
| ЛИСЬЕ | ЕЖОВО | 10:45 | 12:00 |
| ЗАЙЦЕВО | ЛИСЬЕ | 11:05 | 12:15 |
| СОБОЛЕВО | ЗАЙЦЕВО | 11:10 | 12:25 |
| ЕЖОВО | ЗАЙЦЕВО | 12:15 | 13:25 |
| ЗАЙЦЕВО | СОБОЛЕВО | 12:45 | 13:55 |

## Задание5

Путешественник пришел в 08:00 на автостанцию населенного пункта КАЛИНИНО и обнаружил следующее расписание автобусов:

| Пункт отправления | Пункт прибытия | Время отправления | Время прибытия |
|---|---|---|---|
| КАМЫШИ | КАЛИНИНО | 08:15 | 09:10 |
| КАЛИНИНО | БУКОВОЕ | 09:10 | 10:15 |
| РАКИТИНО | КАМЫШИ | 10:00 | 11:10 |
| РАКИТИНО | КАЛИНИНО | 10:05 | 12:25 |
| РАКИТИНО | БУКОВОЕ | 10:10 | 11:15 |
| КАЛИНИНО | РАКИТИНО | 10:15 | 12:35 |
| КАЛИНИНО | КАМЫШИ | 10:20 | 11:15 |
| БУКОВОЕ | КАЛИНИНО | 10:35 | 11:40 |
| КАМЫШИ | РАКИТИНО | 11:25 | 12:30 |
| БУКОВОЕ | РАКИТИНО | 11:40 | 12:40 |

Определите самое ранее время, когда путешественник сможет оказаться в пункте РАКИТИНО согласно этому расписанию.

## Задание 6

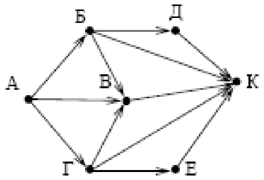
Путешественник пришел в 08:00 на автостанцию населенного пункта СЕРЫЙ БУГОР и обнаружил следующее расписание автобусов для всей районной сети маршрутов:

| Пункт отправления | Пункт прибытия | Время отправления | Время прибытия |
|---|---|---|---|
| Серый бугор | Красное | 9:50 | 11:10 |
| Красное | Зеленые мхи | 10:00 | 11:50 |
| Чёрная горка | Серый бугор | 10:15 | 12:00 |
| Чёрная горка | Зеленые мхи | 10:50 | 12:05 |
| Серый бугор | Зеленые мхи | 11:45 | 12:50 |
| Красное | Чёрная горка | 11:50 | 12:40 |
| Чёрная горка | Красное | 12:50 | 13:40 |
| Красное | Серый бугор | 13:00 | 14:20 |
| Серый бугор | Чёрная горка | 13:05 | 14:40 |
| Зеленые мхи | Чёрная горка | 13:15 | 14:30 |
| Зеленые мхи | Серый бугор | 14:45 | 15:50 |
| Зеленые мхи | Красное | 15:10 | 17:00 |

Определите самое раннее время, когда путешественник сможет оказаться в пункте ЧЕРНАЯ ГОРКА согласно этому расписанию.

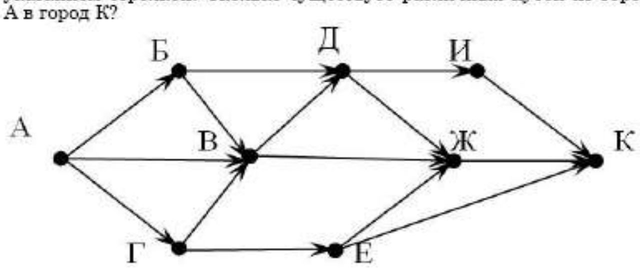
## Задание 7

На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



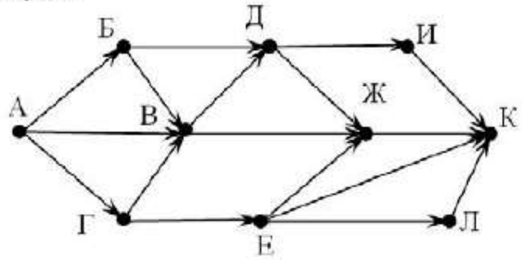

## Задание 8

На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?




## Задание 9

На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?




## Задание на «5»

3. У исполнителя Кузнечик две команды:
   1. прибавь 3,
   2. вычти 2.

   Первая из них увеличивает число на экране на 3, вторая – уменьшает его на 2 (отрицательные числа допускаются). Программа для Кузнечика – это последовательность команд. Сколько различных чисел можно получить из числа 1 с помощью программы, которая содержит ровно 5 команд?

4. Пяти проводникам (Дмитриевой, Григорьевой, Васильеву, Акимовой и Борисову) предложили работу по пяти разным маршрутам: Москва-Воронеж, Москва-Киев, Москва-Симферополь, Москва-Адлер и Москва-Одесса.

   - В Воронеж поеду я! – решительно заявила Дмитриева.

- Ну хорошо, согласна уступить подруге, если меня направят в Киев, - проявила великодушие Григорьева.
- …А меня  - в Симферополь, - не уступила ей в великодушии Дмитриева.
- Хочу поехать в Адлер или Одессу, - сказал Васильев.

Акимова и Борисов выразили желание поехать в Одессу или Киев.

Удастся ли распределить маршруты так, чтобы все проводники были довольны?

## Вывод:

4) Определение графа и его элементов (вершины, рёбра).
5) Ориентированные и неориентированные графы: определения, сходства и различия.
6) Как определяется степень вершины графа?

## Практическое занятие 3

**Тема:** Решение задач на определение производной. Определение максимума мощности в цепи постоянного тока с применением производной.

**Цель:** Научиться дифференцировать функции, применять исследование функции с помощью производной к решению прикладных задач.

**Ход работы:** 1. Найти производную функции, используя определение производной (“по шагам”)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=2x+1$ | $y=x^2-1$ | $y=3-x$ | $y=x^3-2$ | $y=x^2+4$ | $y=-7x+12$ | $y=3-2x$ | $y=-3+4x$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| $y=0,35x+3$ | $y=2x+10$ | $y=x^3-3$ | $y=3x+5$ | $y=3x^2-2$ | $y=13+0,2x$ | $y=-x+7$ | |

2. Найти производную функции, используя таблицу производных:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=5+\cos x$<br>$y=3x^4+\ln x$<br>$y=\dfrac{x^2}{x+1}$ | $y=x^2-\sin x$<br>$y=2^x+4x^5$<br>$y=\dfrac{x}{x-1}$ | $y=6x-2\operatorname{tg} x$<br>$y=\sqrt{x}+3^x$<br>$y=\dfrac{x^3}{2+x}$ | $y=x^3-\cos x$<br>$y=\sqrt{x}-5^x$<br>$y=\dfrac{3x^2}{3+x}$ | $y=5x^2-\sin x$<br>$y=4^x+3x^5$<br>$y=\dfrac{x^2}{3-2x}$ | $y=x+\operatorname{ctg} x$<br>$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}$<br>$y=\dfrac{x^2}{5+2x}$ | $y=6+\cos x$<br>$y=5^x+14x^2$<br>$y=\dfrac{x^4}{2-3x}$ | $y=x^4+\sin x$<br>$y=3^x-2x^6$<br>$y=\dfrac{5x^3}{2-x}$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| $y=-2+\sin x$<br>$y=4x^3-\ln x$<br>$y=\dfrac{-x^2}{5-2x}$ | $y=x^3-\cos x$<br>$y=7^x-6x^3$<br>$y=\dfrac{2x^2}{4+x}$ | $y=2x+\operatorname{ctg} x$<br>$y=\sqrt{x}-7^x$<br>$y=\dfrac{-x^2}{12-x}$ | $y=0.3+\cos x$<br>$y=2x^7-\sqrt{x}$<br>$y=\dfrac{1+x^2}{2x}$ | $y=6x-7\operatorname{tg} x$<br>$y=\sqrt{x}+9^x$<br>$y=\dfrac{3-x^3}{4x^2}$ | $y=x^2-4\sin x$<br>$y=5^x+14x^2$<br>$y=\dfrac{2x^2}{12-3x}$ | $y=5+\cos x$<br>$y=-x^6+\sqrt{x}$<br>$y=\dfrac{x^3+6}{2x}$ | |

3. Найти производную сложной функции

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\cos(2x+9)$ | $y=(3x^6+4)^8$ | $y=e^{7x+2}$ | $y=\sin(-x+9)$ | $y=(2x^6-4)^3$ | $y=e^{-x+12}$ | $y=\cos(2x+9)$ | $y=(-x^5+4x)^8$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| $y=(-x^3-2x)^8$ | $y=e^{3x-7}$ | $y=(x^6-4x)^5$ | $y=e^{4x+8}$ | $y=\cos(x+9$ | $y=(4x^3+x)^7$ | $y=e^{2x-3}$ | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $x^6$) | | | |

4. Вычислить значение производной функции в указанных точках **y'(0)-? y'(-1)-? y'(1)-?**

Найти вторую производную функции

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=7+4x-x^2$ | $y=3x^4-x^2+1$ | $y=x^4+2x^2-2$ | $y=2x^3-x^2-2$ | $y=7-2x-x^3$ | $y=-x^4-2x^3+2$ | $y=x^4-3x^3-8$ | $y=3x^3+x^2-7$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| $y=-2+2x^3-x^2$ | $y=6+3x-2x^2$ | $y=x^4-3x^2+5$ | $y=x^3+7x^2-x$ | $y=2x^3-x^2-2$ | $y=2+2x-x^4$ | $y=x^4-6x^3+4$ | |

5. Закон движения материальной точки задан уравнение S(t).

Найдите ускорение через 2 минуты.

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S(t)=5t^2-2t+3$ | $S(t)=2+3t^2-4t$ | $S(t)=t^2-8t-17$ | $S(t)=5t^2+12t+7$ | $S(t)=2t^2-t+23$ | $S(t)=6t^2+2t+3$ | $S(t)=4t^2+3t+1$ | $S(t)=7t^2+2t-2$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| $S(t)=3-2t+3t^2$ | $S(t)=2+5t^2-7t$ | $S(t)=1-3t+7t^2$ | $S(t)=4+9t+2t^2$ | $S(t)=5+4t+3t^2$ | $S(t)=12-t+9t^2$ | $S(t)=-3+2t+3t^2$ | |

6. **<u>На «отлично»</u>**

В электротехнике большое значение имеют задачи на поиск оптимального решения: расчет параметров электротехнических приборов, при которых в цепи будет наибольшая мощность. Мощность, потребляемая электронагревательным прибором, сопротивление которого равно R, находится по формуле:

$$P=\frac{\varepsilon^2 \cdot R}{(r+R)^2}$$

Электронагревательный прибор потребляет мощность от источника тока, ЭДС которого $\varepsilon$, а внутреннее сопротивление r.

Какое сопротивление должен иметь прибор, чтобы в нем выделялась максимальная мощность? Вычислить значение максимальной мощности.

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon$ | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 4 |
| **r** | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon$ | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 7 | 7 | |
| r | 1 | 3 | 2 | 4 | 4 | 2 | 3 | |

2. 8**. Проверить вычисления в ПО Mathcad Подписать работу (фамилия, тема, вариант)**1. Задать функцию y(x) согласно варианту. Записать предел, вычислить его $\lim_{\Delta x \to 0} \left[ \frac{\left[5-2\cdot(x+\Delta x)^3\right] - \left(5-2\cdot x^3\right)}{\Delta x} \right] \to$

2. Вычислить производные функций согласно варианту. Записать функцию **y(x):=…**, скопировать ниже правую часть равенства, поставить курсор у аргумента x, выполнить команду

**Symbolics-Variable-Differentiate.**

3. Для задания **4** обозначить полученную производную новой функцией, например, **f(x)**. Вычислить значения **f(-1), f(0), f(1).**

4. По аналогии в заданиях **4** и **5** вычислить вторую производную.

5. Сверить результаты с собственными решениями.

6. Сохранить работу, распечатать.

**Вывод:**

7. Дать определение производной.
8. Какой физический и геометрический смысл имеет производная.
9. Напишите формулу производной сложной функции.
10. Дать определение критических точек.
11. Признаки точек максимума и минимума по первой производной.

**Практическое занятие 4**

**Тема:** Нахождение площади фигуры между графиками. Вычисления геометрических, механических и физических величин с помощью интегрального исчисления при решении профессиональных задач.

**Цель:** Научиться интегрировать функции, находить площадь фигуры между двумя графиками, вычислять геометрические, механические и физические величины с помощью интегрального исчисления при решении профессиональных задач.

**Ход работы:** 1. Найти множество всех первообразных функции

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=-5x+3$ | $y=x^2-5x^4$ | $y=cos3x$ | $y=4x-2$ | $y=\frac{1}{2}x+x^4$ | $y=(2x+5)^5$ | $y=2-3x$ | $y=\frac{1}{x^3}+x$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| $y=(2-7x)^{10}$ | $y=\frac{1}{3}x-x^3$ | $y=\sin 4x$ | $y=x^3-2x^6$ | $y=-2x^3+3x$ | $y=\frac{1}{6}x^2-2x^3$ | $y=-3x^6+7x$ | |

2. Найти неопределенный интеграл $\int f(x)dx$

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=5+\cos x$<br>$f(x)=\frac{3}{5-x}$ | $f(x)=x^2-\sin x$<br>$f(x)=\frac{x}{x-1}$ | $f(x)=6x-\sqrt{x}$<br>$f(x)=\frac{5}{2+x}$ | $f(x)=x^3-\cos x$<br>$f(x)=\frac{3}{3+x}$ | $f(x)=5x^2-\sin x$<br>$f(x)=\frac{2}{3-2x}$ | $f(x)=x+\cos x$<br>$f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x}$ | $f(x)=6+\cos x$<br>$f(x)=\frac{6}{2-3x}$ | $f(x)=x^4+\sin x$<br>$f(x)=\frac{5}{2-x}$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| $f(x)=2+\sin x$<br>$f(x)=\frac{-7}{5-2x}$ | $f(x)=x^3-\cos x$<br>$f(x)==\frac{2}{4+x}$ | $f(x)=2x+\cos x$<br>$f(x)=\frac{-1}{12-x}$ | $f(x)=3+\sin x$<br>$f(x)=2x^7-\sqrt{x}$ | $f(x)=6x-\sin x$<br>$f(x)=\frac{2x}{4+x^2}$ | $f(x)=x^2-\sin x$<br>$f(x)=5^x+14x^2$ | $f(x)=1+\cos x$<br>$f(x)=x^6+\sqrt{x}$ | |

3. Вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\int_{-2}^{3} x dx$ | $\int_{0}^{5} x^2 dx$ | $\int_{2}^{3} x^3 dx$ | $\int_{1}^{5} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ | $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^3} dx$ | $\int_{1}^{4} \frac{32}{x^3} dx$ | $\int_{1}^{5} (x+3) dx$ | $\int_{-2}^{0} x^2 dx$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| $\int_{1}^{4} \frac{5}{x^2} dx$ | $\int_{-2}^{5} 3x dx$ | $\int_{0}^{4} \sqrt{x} dx$ | $\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2-x) dx$ | $\int_{0}^{4} x^4 dx$ | $\int_{3}^{4} \frac{2}{x^2} dx$ | $\int_{2}^{3} (5+x) dx$ | |

4. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\sqrt{x}$ $y=0$ $x=4$ | $y=\frac{1}{x^2}$ $y=0$ $x=1$ $x=2$ | $y=2x^2$ $y=x$ | $y=x^3$ $y=x^2$ | $y=\sqrt{x}$ $y=0$ $x=9$ | $y=\frac{2}{x^2}$ $y=0$ $x=1$ $x=3$ | $y=x^3$ $y=x$ | $y=3x^3$ $y=0$ $x=1$ $x=2$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| $y=x^2$ $y=2x$ | $y=6+3x$ $y=0$ $x=3$ $x=4$ | $y=x^4$ $y=x^3$ | $y=x^3$ $y=0$ $x=1$ $x=4$ | $y=x^2$ $y=x+2$ | $y=2x$ $y=x^2$ | $y=7x$ $y=x^2$ | |

5. Скорость движения материальной точки изменяется по закону согласно варианту. Найдите длину пути, пройденного телом за первые 3сек.

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(t)=5t^2-2t+3$ | $v(t)=2+3t^2-4t$ | $v(t)=t^2-8t-17$ | $v(t)=5t^2+12t+7$ | $v(t)=2t^2-t+23$ | $v(t)=6t^2+2t+3$ | $v(t)=4t^2+3t+1$ | $v(t)=7t^2+2t-2$ |
| **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | |
| $v(t)=3-2t+3t^2$ | $v(t)=2+5t^2-7t$ | $v(t)=1-3t+7t^2$ | $v(t)=4+9t+2t^2$ | $v(t)=5+4t+3t^2$ | $v(t)=12-t+9t^2$ | $v(t)=-3+2t+3t^2$ | |

**На «отлично»**

3. **Изучить теоретическую часть**
4. **Определить действующее значение переменного синусоидального тока, согласно варианту, используя приведённый в теории вывод**.

При расчётах и электрических измерениях широко применяется действующее значение переменного тока I.

Для его определения можно исходить из теплового действия переменного тока в электрической цепи. Количество теплоты, $\boxed{i = I_m \sin\omega t}$ выделенное синусоидальным током за время равное периоду Т:

$$\boxed{Q = \int_0^T i^2 r dt = r\int_0^T i^2 dt}$$

Такое же количество теплоты в сопротивлении r за время Т выделит

$$Q = I^2 rT \qquad r\int_0^T i^2 dt = I^2 rT \qquad \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2{}_{m*\sin^2 \varpi t dt}} = I_m \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2 \varpi t dt}$$

постоянный ток I:

| | |
|---|---|
| **1** | 10 |
| **2** | 2 |
| **3** | 3 |
| **4** | 4 |
| **5** | 5 |
| **6** | 7 |
| **7** | 3 |
| **8** | 5 |
| **9** | 1 |
| **10** | 9 |
| **11** | 6 |
| **12** | 2 |
| **13** | 8 |
| **14** | 7 |
| **15** | 10 |

Известно, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Так как,

$$\int_0^T \sin^2\omega t dt = \int_0^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{2}\int_0^T dt - \frac{1}{2}\int_0^T cos2\omega\, t dt = \frac{1}{2}T - \frac{1}{2\cdot 2\omega}\sin 2\omega\, t \Big|_0^T = \frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega}\sin\frac{4\pi}{T}t \Big|_0^T = \frac{T}{2}$$

$I = I_m\sqrt{\frac{1}{T}*\frac{T}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 * I_m$ Таким образом, действующее значение переменной синусоидального тока меньше его амплитудного значения в $\sqrt{2}$ раз.

Такое же соотношение справедливо для действующих значений синусоидального напряжения и ЭДС: $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$

**6. Проверить вычисления в ПО Mathcad:**

**Подписать работу: фамилия, тема, вариант**

1. Записать предложенную функцию, скопировать правую часть, выделить переменную курсором, выполнить команду **Symbolics-Variable-Integrate**

2. Записать неопределенный интеграл, вычислить его через символ «стрелка».

3. Записать определенный интеграл, вычислить его через символ «равенства».

4. Найти площадь фигуры между графиками:

- Построить в одной системе координат графики предложенных функций y(x) и g(x).
- Найти абсциссы точек пересечения, приравняв правые части через жирное равно и выполнив команду **Symbolics-Variable-Solve**.
- Вычислить определенный интеграл на полученном промежутке.

12. По аналогии выполнить задание 5

**Вывод:**

6. Дать определение первообразной функции
7. Написать формулу Ньютона-Лейбница для нахождения определённого интеграла
8. Геометрический смысл определённого интеграла
9. Дать определение криволинейной трапеции.

## Практическое занятие 5

**Тема:** Выделение функции и аргумента из заданных переменных величин, установление физического смысла функции, производной от нее. Установление на основе известных сведений из физики, механики, электротехники зависимости между функцией, ее производной и аргументом. Определение типа составленного уравнения. Решение уравнения и поиски его общего и частного решения.

**Цель:** закрепить навыки в решении дифференциальных уравнений.

### Ход работы

5. Найдите общее решение дифференциальных уравнений.

| **№ варианта** | **Первое дифференциальное уравнение** | **Второе дифференциальное уравнение** | **Третье дифференциальное уравнение** |
|---|---|---|---|
| **1** | $\frac{dx}{y^2}=\frac{3dy}{x^2}$ | $(x+xy)y'=y-xy$ | $y''-5y'-6y=0$ |
| **2** | $\sqrt{y}dy=3\sqrt{x}dx$ | $x+yy'=0$ | $3y''-11y'+6y=0$ |
| **3** | $\sqrt{y}dx=\sqrt{x}dy$ | $y'=xy$ | $y''-16y'+64y=0$ |
| **4** | $dy=(3-4x)dx$ | $y'=xy^2$ | $9y''+6y'+10y=0$ |
| **5** | $\frac{dy}{dx}=6x^2-8x+1$ | $y'=-\frac{x}{y}$ | $2y''-7y'+3y=0$ |
| **6** | $\frac{dy}{x^2}=\frac{dx}{3y^2}$ | $y'=-\frac{y\cos x}{1+y}$ | $2y''+3y'-2y=0$ |
| **7** | $\frac{dy}{dx}=\cos x-\sin x$ | $y'=4x\sqrt{y}$ | $y''-8y'+16y=0$ |
| **8** | $\frac{dy}{dx}=3\sin x$ | $xy'=y^2$ | $4y''+4y'+5y=0$ |
| **9** | $\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dx}{\sqrt{x}}$ | $x(1+y)y'=(1-x)y$ | $y''+3y'-10y=0$ |
| **10** | $\frac{dy}{3\sqrt{x}}=\frac{dx}{\sqrt{y}}$ | $xy'+(x+1)y=0$ | $3y''-10y'+3y=0$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **11** | $\frac{1}{dx} = \frac{5\sin x}{dy}$ | $xy' + y^2 = 0$ | $y'' + 6y' + 9y = 0$ |
| **12** | $(8-9x)dx = dy$ | $y' = 3xy$ | $y'' - 8y' + 25y = 0$ |
| **13** | $\sin x - \cos x = \frac{dy}{dx}$ | $-7yy' = x$ | $y'' - 3y' - 10y = 0$ |
| **14** | $\frac{dy}{dx} = 7x^2 - 5x + 2$ | $y' = 8xy^2$ | $2y'' - 3y' - 2y = 0$ |
| **15** | $\frac{dx}{y^5} = \frac{7dy}{x^3}$ | $y' - xy = 0$ | $y'' + 2y' + 5y = 0$ |

**В Mathcad**

- Записать уравнение через жирное равно (символ производной сочетание клавиш Ctrl+F7)
- Записать уравнение с разделенными переменными через жирное равно
- Взять неопределенный интеграл от обеих частей, выделить все выражение и нажать символ «Стрелочка»
- Записать общее решение

6. Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| $y'' + 3y' + 2y = 0$ y(0)=-1 $y'$(0)=3 | $y'' + 2y' + 5y = 0$ y(0)= 1 $y'$(0)=1 | $y'' + 2y' - 5y = 0$ y(0)=0 $y'$(0)=1 | $y'' + 2y' + 2y = 0$ y(0)=1 $y'$(0)=1 | $y'' + 4y' + 7y = 0$ y(0)=1 $y'$(0)=1 |
| **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| $y'' + 2y' - 8y = 0$ y(0)=4 $y'$(0)=-4 | $y'' - 2y' + y = 0$ y(0)=4 $y'$(0)=2 | $y'' - 3y' + 2y = 0$ y(0)=2 $y'$(0)=3 | $y'' + 4y' + 4y = 0$ y(0)=1 $y'$(0)=-1 | $y'' + 4y = 0$ y($\frac{\pi}{4}$)=1 $y'$($\frac{\pi}{4}$)=-2 |
| **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| $y'' - y = 0$ y(0)=0 $y'$(0)=1 | $y'' - 2y' - 3y = 0$ y(0)=8 $y'$(0)=0 | $y'' - 9y = 0$ y(0)=2 $y'$(0)=6 | $y'' - 2y' + 50y = 0$ y(0)=1 $y'$(0)=1 | $y'' - 10y' + 25y = 0$ y(0)=2 $y'$(0)=8 |

7. **В Mathcad**

- Будем решать задачу с помощью функции Odesolve.
- Прежде чем вводить дифференциальное уравнение, введем ключевое слово
- Given, а затем - дифференциальное уравнение.
- При вводе дифференциального уравнения необходимо в скобках указать аргумент искомого решения и использовать знак символьного равенства.
- Следом за уравнением необходимо ввести начальное условие. При вводе начального условия, как и при вводе уравнения, следует использовать знак символьного равенства.
- Знак символьного равенства можно ввести щелчком по соответствующей кнопке в панели Evaluation.
- Знак символьного равенства можно ввести с клавиатуры, нажав одновременно клавиши <Ctrl> и <=>

- Построим график найденного решения y(x)
- Для того чтобы построить график решения y(x), щелкните в панели Graph по пиктограмме декартова графика, введите в помеченных позициях имена аргумента и функции и щелкните по свободному месту в рабочем документе вне выделяющей рамки

**8. на «отлично»**

- изучить *алгоритм решения задач на составление дифференциальных уравнений*

5.из переменных величин выделяют функцию и аргумент, устанавливают физический смысл функции и ее производной.

6.Используя известные сведения из физики, механики, электротехники, выражают зависимость между функцией, ее производной и аргументом (составляют дифференциальное уравнение)

7.определяют тип уравнения и находят общее решение

8.если даны начальные условия, то получают частное решение уравнения.

- *решить задачу из электротехники согласно алгоритму*

**Конденсатор емкостью Q включается в цепь с напряжением U и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после выключения.**

1. Сила тока I представляет собой производную количества электричества q, прошедшего через проводник, по времени , т.е.**I=**$\frac{dq}{dt}$ .В цепи действует электродвижущая сила **E**, равная разности между напряжением цепи **U** и напряжением конденсатора $\frac{q}{Q}$, т. е.**E=U-**$\frac{q}{Q}$**.** Согласно Закону Ома, **I=**$\frac{E}{R}$**.**Теперь можно составить уравнение $\frac{dq}{dt}=\frac{U-\frac{q}{Q}}{R}$ или $\frac{dq}{dt}+\frac{q}{QR}=\frac{U}{R}$
2. Это – линейное уравнение первого порядка. Его общее решение имеет вид **q=Ce**$^{-\frac{t}{QR}}$ **+UQ**.
3. По условию **q=0** при **t=0** и, значит, ________ т.е.С=______ . Таким образом, заряд конденсатора в момент t выражается формулой q=**______________**.

**Выводы:**

7. Сформулируйте определение дифференциального уравнения.
8. Что является решением дифференциального уравнения?
9. Какое решение дифференциального уравнения называется общим решением?
10. Какое решение дифференциального уравнения называется частным решением?
11. Уравнение какого вида называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными?
12. Уравнение какого вида называется однородным дифференциальным уравнением второго порядка?

## Практическое занятие 6

**Тема:** Работа с числовыми рядами. Признак сходимости числового ряда по Даламберу. Разложение функции в ряд Маклорена.

**Цель:** закрепить навыки в работе с числовыми рядами.

**Теория: Числовой ряд** – это сумма членов числовой последовательности вида

Частична**я сумма числового ряда** – это сумма вида , где $n$ – некоторое натуральное число.

Числовой ряд называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности частичных сумм $S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$. Если предел последовательности частичных сумм числового ряда не существует или бесконечен, то ряд называется **расходящимся.**

**Необходимый признак сходимости ряда: Если общий член ряда <u>не стремится к нулю</u>, то ряд расходится**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Ряд Маклорена

**Для разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена необходимо:**

1. Вычислить значения функции и ее последовательных производных в точке $x = 0$, т.е.
2. Составить ряд Маклорена, подставив значения функции и ее последовательных производных в формулу ряда Маклорена;
3. Найти промежуток сходимости полученного ряда по формуле $R = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (a_n \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots)$

**Ход работы**

1. Записать первые три члена ряда, вычислить их сумму.

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n+1}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ |
| **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n^2}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^2}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3+4}$ |
| **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}3^n}{n^4}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$ | $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{n^2-2}$ | $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{n^3}$ |

2. Записать сумму в свернутом виде с общим членом ряда, записать выражение для 20-го члена ряда

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\ldots$ | $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\ldots$ | $\frac{2}{5}+\frac{5}{7}+\frac{8}{9}+\frac{11}{11}+\ldots$ | $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots$ | $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots$ |
| **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+\frac{8}{9}+\ldots$ | $\frac{2}{7}+\frac{2^2}{14}+\frac{2^3}{21}+\frac{2^4}{28}+\ldots$ | $\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\ldots$ | $\frac{4}{5}+\frac{4^2}{10}+\frac{4^3}{15}+\frac{4^4}{20}+\ldots$ | $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{8}+\frac{10}{11}+\ldots$ |
| **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| $\frac{1}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{5}{5^3}+\frac{7}{5^4}+\ldots$ | $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{12}+\frac{9}{16}+\ldots$ | $\frac{2}{5}+\frac{5}{7}+\frac{8}{9}+\frac{11}{11}+\ldots$ | $\frac{2}{5}+\frac{4}{7}+\frac{6}{9}+\frac{8}{11}+\ldots$ | $\frac{3}{2}+\frac{6}{7}+\frac{9}{12}+\frac{12}{17}+\ldots$ |

3. Исследовать ряд на сходимость по признаку Даламбера

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{(n+1)n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n\quad 2)}{4^n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n-1)(n+1)}$ |
| **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{2^n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{4n+1}}{n\cdot 3^{2n+1}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n+1}}{(n-1)^2}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{(n+1)!}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n-2)!}$ |
| **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2 3^n}{(n+3)!}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^{3n+1}}{(n-1)!}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^{2n-1}}{3^{2n+1}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{4^{n-2}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{(2n)!}$ |

4. **на «хорошо»**

Вычислить приближенно определенный интеграл, предварительно разложив подынтегральную функцию в ряд Маклорена, с точностью до 0,001.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| f(x)= $\int_0^{0,3} e^{-4x^2}$ | f(x)= $\int_0^{0,2}\frac{\sin(x)}{x}$ | f(x)= $\int_0^{0,4} e^{-3x^2}$ | f(x)= $\int_0^{0,5}\frac{\cos(x)-1}{x}$ | f(x)= $\int_0^{0,6}\frac{1-\cos(x)}{x}$ |
| **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| f(x)= $\int_0^{0,7}\frac{\sin(x)}{x}$ | f(x)= $\int_0^{0,8}\frac{\sin(x)}{x^2}$ | f(x)= $\int_0^{0,3}\frac{1-\cos(x)}{x}$ | f(x)= $\int_0^{0,2} e^{-2x^2}$ | f(x)= $\int_0^{0,4}\frac{\sin(x)}{x}$ |
| **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| f(x)= $\int_0^{0,9} e^{-\frac{x^2}{2}}$ | f(x)= $\int_0^{0,2} \frac{2\sin(x)}{x}$ | f(x)= $\int_0^{0,4} \frac{\sin(x)}{2x}$ | f(x)= $\int_0^{0,6} \frac{5\sin(x)}{x}$ | f(x)= $\int_0^{0,2} \frac{1-\cos(x)}{4x}$ |

5. **Проверить вычисления в ПО Mathcad**

**Выводы:**

1. Дать определение степенного ряда
2. Дать определение сходящегося и расходящегося ряда
3. Необходимый признак сходимости рядов
4. Признак Даламбера
5. Разложение функции в ряд Маклорена, радиус сходимости.

**Дополнительно:**

Разложить функцию в ряд Маклорена, найти радиус сходимости

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| f(x)=$e^{2x}$ | f(x)=sin(-x) | f(x)=cos(4x) | f(x)=$\frac{1}{1+x}$ | f(x)=ln(1+x) |
| **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| f(x)= $\frac{2}{3-x}$ | f(x)= $\frac{1}{1-x}$ | f(x)= $\frac{\cos(x)\ -1}{x}$ | f(x)= $\frac{\sin(x)}{x}$ | f(x)=$e^{3x-1}$ |
| **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| f(x)=cos(3x) | f(x)= $\frac{3}{5-x}$ | f(x)=sin(2x) | f(x)= $\frac{4}{2-x}$ | f(x)=sin(3x) |

**Практическое занятие 7**

Тема: Решение комбинаторных задач при организации технической эксплуатации машин и оборудования на железнодорожном транспорте.

**Цель:** закрепить навыки в работе задачами по теории вероятностей

**Теория: Вероятностью P(A) события** в данном опыте называется отношение числа M исходов опыта, благоприятствующих событию A, к общему числу N возможных исходов опыта. $P(A) = \frac{M}{N}$

**Ход работы:**

| **Вар** | **Номера заданий** | **Вар** | **Номера заданий** | **Вар** | **Номера заданий** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | 1, 8, 13,21, 28, 35 | **6.** | 6, 7, 18, 20, 27, 34 | **11.** | 6, 11, 13, 20, 27, 35 |
| **2.** | 2, 9, 14, 22, 29, 36 | **7.** | 2, 7, 15, 22, 29, 31 | **12.** | 1, 12, 14, 21, 28, 36 |
| **3.** | 3, 10, 15,23, 30, 31 | **8.** | 3, 8, 16, 23, 30, 32 | **13.** | 3, 7, 15, 22, 29, 31 |
| **4.** | 4, 11, 16, 24, 25, 32 | **9.** | 4, 9, 17, 24, 25, 33 | **14.** | 5, 8, 16, 23, 30, 32 |
| **5.** | 5, 12, 17, 19, 26, 33 | **10.** | 5, 10, 18, 19, 26, 34 | **15.** | 6, 9, 17, 24, 25, 33 |

| | | |
|---|---|---|
| 1.Решить комбинаторную задачу | 1. | Сколькими способами можно распределить пять машинистов на пять электропоездов по одному человеку на поезд? |
| | 2. | Из десяти машинистов надо выбрать семерых для работы по определенным дням недели. Сколькими способами можно это сделать? |
| | 3. | Сколькими способами из 25 студентов группы можно выбрать 5 делегатов на конференцию? |
| | 4. | Сколько различных расписаний на учебный день можно составить из 6 предметов, используя каждый по одному в день? |
| | 5. | Сколькими способами можно выбрать из актива группы в 10 человек старосту, профорга и культорга? |
| | 6. | Сколько существует способов выучить любые пять стихотворений их восьми, предложенных учителем? |
| 2.Найти вероятность события, согласно определению | 7. | Таня забыла последнюю цифру номера телефона подруги и набрала наугад. Какова вероятность, что Таня попала к своей знакомой? |
| | 8. | Какова вероятность, что из 50 пронумерованных жетонов извлеченный наугад жетон содержит только одну цифру 3? |
| | 9. | Студент при подготовке к экзамену не выучил 7 билетов из 25. |

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td></td><td>Какова у него вероятность достать выученный билет?</td></tr>
<tr><td>10.</td><td>Цифры 1, 2, 3, …, 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) четное; б) двузначное.</td></tr>
<tr><td>11.</td><td>На завод привезли партию из 1000 подшипников. Случайно в эту партию попало 30 подшипников, не удовлетворяющих стандарту. Определить вероятность Р(А) того, что взятый наудачу подшипник окажется стандартным.</td></tr>
<tr><td>12.</td><td>Из букв слова УРАВНЕНИЕ выбирается наугад одна буква. Какова вероятность, что эта буква будет: а) гласной, б) согласной, в) буквой Щ?</td></tr>
<tr><td rowspan="6">3.Используя свойства вероятности, вычислить вероятность события</td><td>13.</td><td>Слово «книга» рассыпали. Какова вероятность, что собранное слово «книга»?</td></tr>
<tr><td>14.</td><td>В самолете 4 двигателя. Вероятность нормальной работы каждого 0,95. Какова вероятность, что в полете возникнут неполадки во всех четырех двигателях?</td></tr>
<tr><td>15.</td><td>Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной цели. Вероятность попадания первого 0,9, а второго – 0,8. Какова вероятность, что хотя бы один из них попадет?</td></tr>
<tr><td>16.</td><td>В билете три раздела. Из 40 вопросов первого раздела студент знает 30, из 30 вопросов второго – 15, и 30 вопросов третьего – 10. Определить вероятность правильного ответа по билету.</td></tr>
<tr><td>17.</td><td>Тепловоз 2ТЭ-10Л (в двухсекционном варианте) имеет 2 дизеля по 2200 кВт. Вероятность нормальной работы каждого 0,97. С какой вероятностью бесперебойно будет работать хотя бы один дизель?</td></tr>
<tr><td>18.</td><td>В вещевой лотерее разыгрывается 5 предметов. Всего в урне 30 билетов. Каждый подошедший наудачу достает 4 билета. Какова вероятность, что ровно 2 из них – выигрышные?</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4. Согласно закону распределения дискретной случайной величины, построить многоугольник распределения, вычислить математическое</td><td>19.</td><td><table><tr><td>X</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>p</td><td>0.1</td><td>0.2</td><td>0.5</td><td>0.3</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>20.</td><td><table><tr><td>X</td><td>20</td><td>100</td><td>150</td><td>500</td></tr><tr><td>p</td><td>0.8</td><td>0.1</td><td>0.05</td><td>0.05</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>21.</td><td><table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>p</td><td>0.5</td><td>0.2</td><td>0.1</td><td>0.2</td></tr></table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение.</td><td>22.</td><td><table><tr><td>X</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>p</td><td>0.1</td><td>0.3</td><td>0.2</td><td>0.4</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>23.</td><td><table><tr><td>X</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>p</td><td>0.3</td><td>0.1</td><td>0.4</td><td>0.2</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>24.</td><td><table><tr><td>X</td><td>10</td><td>20</td><td>40</td><td>100</td></tr><tr><td>p</td><td>0.5</td><td>0.1</td><td>0.3</td><td>0.1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td rowspan="6">5.Проведите эксперимент:</td><td>25.</td><td rowspan="6">На стол 50 раз бросаются две монеты. Исходу «орёл» присваиваете числовое значение 1, исходу «решка» - 0. Вычислить вероятность каждого возможного события, исходя из результатов эксперимента, занести результаты в таблицу,<br><table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>p</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>построить многоугольник распределения, вычислить</td></tr>
<tr><td>26.</td></tr>
<tr><td>27.</td></tr>
<tr><td>28.</td></tr>
<tr><td>29.</td></tr>
<tr><td>30.</td></tr>
<tr><td rowspan="6">6.Рассчитать вероятность согласно формуле Бернулли</td><td>31.</td><td rowspan="6">Найти вероятность того, что при 16 бросаниях монеты «орел» выпадет ровно k раз, где k-номер варианта по практическим занятиям.</td></tr>
<tr><td>32.</td></tr>
<tr><td>33.</td></tr>
<tr><td>34.</td></tr>
<tr><td>35.</td></tr>
<tr><td>36.</td></tr>
</table>

Вывод:

1. Чем отличается размещение от перестановок?
2. Чем отличается размещение от сочетания?
3. Классическое определение вероятности
4. Свойства вероятности
5. Формула Бернулли
6. Что такое математическое ожидание?

Дополнительно: **решить уравнение** $\mathbf{C_x^{x-2}+2x=9}$

## Практическое занятие 8

**Тема:** Вычисление определенного интеграла по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона

**Цель:** научиться пользоваться численными методами при вычислении определённого интеграла.

**Теория: Численное интегрирование**— вычисление значения определённого интеграла (как правило, приближённое). Под численным интегрированием понимают набор численных методов отыскания значения определённого интеграла.

Численное интегрирование применяется, когда:

- Сама подынтегральная функция не задана аналитически. Например, она представлена в виде таблицы (массива) значений в узлах некоторой расчётной сетки.
- Аналитическое представление подынтегральной функции известно, но её первообразная не выражается через аналитические функции. Например, $f(x) = \exp(-x^2)$

1. **<u>Метод прямоугольников</u>** приближённо выражает интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}).$$

2. **<u>Метод трапеций</u>**

$$I \approx h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right), \text{ где } h = \frac{b-a}{n}$$

3. **<u>Метод парабол (</u>метод Симпсона**) N=2n

$$I \approx \frac{b-a}{6N}\left(f_0 + 4\left(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2N-1}\right) + 2\left(f_2\right.\right.$$

Приближение функции одним полиномом на всем отрезке интегрирования, как правило, приводит к большой ошибке в оценке значения интеграла.

**Для уменьшения погрешности** отрезок интегрирования разбивают на части и применяют численный метод для оценки интеграла на каждой из них.

При стремлении количества разбиений к бесконечности, оценка интеграла стремится к его истинному значению для аналитических функций для любого численного метода.

**Ход работы:**

1. Вычислить данный определенный интеграл с помощью формул интегрирования.
2. Вычислите определенный интеграл
   a. методом прямоугольников,
   b. методом трапеций
   c. методом Симпсона

   на интервале от a до b, разделив отрезок [ab] на **10**

| **№ вар** | **Функция** | **a** | **b** |
|---|---|---|---|
| **1** | $x^2$ | **1** | **9** |
| **2** | $x$ | **2** | **9** |
| **3** | $x+1$ | **1** | **8** |
| **4** | $x^2-1$ | **2** | **9** |
| **5** | $x^2+2x$ | **1** | **7** |
| **6** | $2x+2$ | **3** | **9** |
| **7** | $5+x^2$ | **1** | **8** |
| **8** | $x^2+6$ | **1** | **5** |
| **9** | $2x^2+1$ | **2** | **6** |
| **10** | $2+x^2$ | **1** | **7** |
| **11** | $3x-1$ | **3** | **9** |
| **12** | $x+x^2$ | **1** | **5** |
| **13** | $1+3x$ | **2** | **8** |
| **14** | $x^2+4$ | **1** | **9** |
| **15** | $4x-1$ | **2** | **9** |

равных частей

3. Оцените погрешности приближенных вычислений.

**Вывод:**

1. В чём заключается принцип численного интегрирования?
2. От чего зависит погрешность численного интегрирования?
3. Какой из рассмотренных методов численного интегрирования даёт более точный результат?

## Практическое занятие 8

**Тема:** Вычисление определенного интеграла по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона

**Цель:** научиться пользоваться численными методами при вычислении определённого интеграла.

**Теория: Численное интегрирование**— вычисление значения определённого интеграла (как правило, приближённое). Под численным интегрированием понимают набор численных методов отыскания значения определённого интеграла.

Численное интегрирование применяется, когда:

- Сама подынтегральная функция не задана аналитически. Например, она представлена в виде таблицы (массива) значений в узлах некоторой расчётной сетки.
- Аналитическое представление подынтегральной функции известно, но её первообразная не выражается через аналитические функции. Например, $f(x) = \exp(-x^2)$

1. **Метод прямоугольников** приближённо выражает интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}).$$

2. **Метод трапеций**

$$I \approx h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right),\ \text{где}\ h = \frac{b-a}{n}$$

3. **Метод парабол (метод Симпсона**) N=2n

$$I \approx \frac{b-a}{6N}\left(f_0 + 4\left(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2N-1}\right) + 2\left(f_2\right.\right.$$

Приближение функции одним полиномом на всем отрезке интегрирования, как правило, приводит к большой ошибке в оценке значения интеграла.

**Для уменьшения погрешности** отрезок интегрирования разбивают на части и применяют численный метод для оценки интеграла на каждой из них.

При стремлении количества разбиений к бесконечности, оценка интеграла стремится к его истинному значению для аналитических функций для любого численного метода.

**Ход работы:**

4. Вычислить данный определенный интеграл с помощью формул интегрирования.
5. Вычислите определенный интеграл
   a. методом прямоугольников,
   b. методом трапеций
   c. методом Симпсона

   на интервале от a до b, разделив отрезок [ab] на **10**

| **№ вар** | **Функция** | **a** | **b** |
|---|---|---|---|
| **1** | $x^2$ | **1** | **9** |
| **2** | $x$ | **2** | **9** |
| **3** | $x+1$ | **1** | **8** |
| **4** | $x^2-1$ | **2** | **9** |
| **5** | $x^2+2x$ | **1** | **7** |
| **6** | $2x+2$ | **3** | **9** |
| **7** | $5+x^2$ | **1** | **8** |
| **8** | $x^2+6$ | **1** | **5** |
| **9** | $2x^2+1$ | **2** | **6** |
| **10** | $2+x^2$ | **1** | **7** |
| **11** | $3x-1$ | **3** | **9** |
| **12** | $x+x^2$ | **1** | **5** |
| **13** | $1+3x$ | **2** | **8** |
| **14** | $x^2+4$ | **1** | **9** |
| **15** | $4x-1$ | **2** | **9** |

равных частей

6. Оцените погрешности приближенных вычислений.

**Вывод:**

4. В чём заключается принцип численного интегрирования?
5. От чего зависит погрешность численного интегрирования?
6. Какой из рассмотренных методов численного интегрирования даёт более точный результат?

## Практическое занятие 8

**Тема:** Вычисление определенного интеграла по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона

**Цель:** научиться пользоваться численными методами при вычислении определённого интеграла.

**Теория: Численное интегрирование**— вычисление значения определённого интеграла (как правило, приближённое). Под численным интегрированием понимают набор численных методов отыскания значения определённого интеграла.

Численное интегрирование применяется, когда:

- Сама подынтегральная функция не задана аналитически. Например, она представлена в виде таблицы (массива) значений в узлах некоторой расчётной сетки.
- Аналитическое представление подынтегральной функции известно, но её первообразная не выражается через аналитические функции. Например, $f(x) = \exp(-x^2)$

1. **<u>Метод прямоугольников</u>** приближённо выражает интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}).$$

| № вар | Функция | a | b |
|---|---|---|---|
| 1 | $x^2$ | 1 | 9 |
| 2 | $x$ | 2 | 9 |
| 3 | $x+1$ | 1 | 8 |
| 4 | $x^2-1$ | 2 | 9 |
| 5 | $x^2+2x$ | 1 | 7 |
| 6 | $2x+2$ | 3 | 9 |
| 7 | $5+x^2$ | 1 | 8 |
| 8 | $x^2+6$ | 1 | 5 |
| 9 | $2x^2+1$ | 2 | 6 |
| 10 | $2+x^2$ | 1 | 7 |
| 11 | $3x-1$ | 3 | 9 |
| 12 | $x+x^2$ | 1 | 5 |
| 13 | $1+3x$ | 2 | 8 |
| 14 | $x^2+4$ | 1 | 9 |
| 15 | $4x-1$ | 2 | 9 |

2. **<u>Метод трапеций</u>**

$$I \approx h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right),$$ где $h = \frac{b-a}{n}$

3. **<u>Метод парабол (</u>метод Симпсона**) N=2n

$$I \approx \frac{b-a}{6N}\left(f_0 + 4\left(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2N-1}\right) + 2\left(f_2\right.\right.$$

Приближение функции одним полиномом на всем отрезке интегрирования, как правило, приводит к большой ошибке в оценке значения интеграла.

**Для уменьшения погрешности** отрезок интегрирования разбивают на части и применяют численный метод для оценки интеграла на каждой из них.

При стремлении количества разбиений к бесконечности, оценка интеграла стремится к его истинному значению для аналитических функций для любого численного метода.

**Ход работы:**

7. Вычислить данный определенный интеграл с помощью формул интегрирования.
8. Вычислите определенный интеграл
   a. методом прямоугольников,
   b. методом трапеций
   c. методом Симпсона

   на интервале от a до b, разделив отрезок [ab] на **10**

равных частей

9. Оцените погрешности приближенных вычислений.

**Вывод:**

7. В чём заключается принцип численного интегрирования?
8. От чего зависит погрешность численного интегрирования?
9. Какой из рассмотренных методов численного интегрирования даёт более точный результат?

## Практическое занятие 9

**Тема:** Решение задач на нахождение аналитического выражения функции по её табличному заданию

**Цель:** научиться пользоваться численными методами при нахождении аналитического выражения функции и значения производной в данной точке.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | .. |
| $f(x_0)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | .. |

**Теория:** При алгебраической интерполяции для представления информации о функции $f(x)$ используется таблица значений этой функции. Задачей вычислительной математики является задача построения по таблице такой функции $\tilde{f}$, которая бы не сильно отличалась от $f$. Точки $x_i$ называются **узлами интерполяции**, а условия $f(x_i)$– **условиями интерполяции**. При этом f(x) ищем только на отрезке $[x_0,x_n]$. Если необходимо найти функцию вне отрезка, то - это задача **экстраполяции**. Задача имеет много решений, т.к. через заданные точки $(x_i, f_i)$, i=0, 1,..., N, можно провести бесконечно много кривых, каждая из которых будет графиком функции, для которой выполнены все условия интерполяции. Для практики важен случай аппроксимации функции многочленами, т.е.

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$$

| | |
|---|---|
| В случае полинома первого порядка **<u>m=1</u>**, т.е. $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$, система нормальных уравнений примет вид:<br>$Na_0 + a_1\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} f_i$<br>$a_0\sum_{i=1}^{N} x_i + a_1\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i f_i$ | При **<u>m=2</u>** имеем: $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$<br>$Na_0 + a_1\sum_{i=1}^{N} x_i + a_2\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} f_i$<br>$a_0\sum_{i=1}^{N} x_i + a_1\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{N} x_i^3 = \sum_{i=1}^{N} x_i f_i$<br>$a_0\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{N} x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{N} x_i^4 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 f_i$ |

**Ход работы**

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x$$

1. Для функции y=f(x), согласно варианту, найдите приближенные линейную и квадратичную зависимость $\varphi(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2$. Вычисления производите с двумя знаками после запятой.

1

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | −1 | 0,5 | 1 | 1,5 |
| f | 0,5 | 1,2 | 1,4 | 1,6 |

8

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 2 | 3 | 3.5 |
| y | -1 | 0.2 | 0.5 | 0.8 |

2

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 4,1 | 6,2 | 8,2 | 10,2 |

9

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | -2 | 1,5 | 3,5 | 5 |
| f | 1,4 | 1,6 | 1,7 | 1,5 |

3

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | −1,5 | 0 | 0,5 | 1 |
| f | 0 | 0,5 | 1,2 | 1,4 |

10

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | −1 | 2 | 3 | 4 |
| f | 2,1 | 2,5 | 3 | 5 |

2. Оцените погрешность вычислений с помощью суммы квадратов отклонений:

$S_1=\sum_{i=1}^{n}\left(a_0+a_1\cdot x_i-f_i\right)^2$

$S_2=\sum_{i=1}^{n}\left(a_0+a_1\cdot x_i+a_2\cdot x_i^2-f_i\right)^2$

.

<table>
<tr><td>4</td><td><table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>3,1</td><td>4,2</td><td>6,2</td><td>8,2</td></tr></table></td><td>11</td><td><table><tr><td>x</td><td>0,5</td><td>1</td><td>1,5</td><td>2</td></tr><tr><td>f</td><td>-2</td><td>0</td><td>1,2</td><td>2</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>5</td><td><table><tr><td>x</td><td>0,5</td><td>1</td><td>1,5</td><td>2</td></tr><tr><td>f</td><td>0,2</td><td>0,5</td><td>1,5</td><td>2</td></tr></table></td><td>12</td><td><table><tr><td>x</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>f</td><td>0,2</td><td>1</td><td>2,3</td><td>5</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>6</td><td><table><tr><td>x</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>1,1</td><td>4,2</td><td>6,2</td><td>7,2</td></tr></table></td><td>13</td><td><table><tr><td>x</td><td>-5</td><td>-3,5</td><td>-2</td><td>1,5</td></tr><tr><td>f</td><td>-1</td><td>0,2</td><td>1,1</td><td>2</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>7</td><td><table><tr><td>x</td><td>-5</td><td>-3,5</td><td>-2</td><td>1,5</td></tr><tr><td>y</td><td>0,5</td><td>1,2</td><td>1,4</td><td>1,6</td></tr></table></td><td>14</td><td><table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>f</td><td>-0,2</td><td>1,5</td><td>2,1</td><td>3</td></tr></table></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>15</td><td><table><tr><td>x</td><td>0,5</td><td>1</td><td>1,5</td><td>2</td></tr><tr><td>f</td><td>-2</td><td>-0,5</td><td>1,2</td><td>5</td></tr></table></td></tr>
</table>

**Вывод:**

1. Что такое аппроксимация?
2. Что такое интерполяция?
3. Что такое экстраполяция?
4. Метод наименьших квадратов

**Практическое занятие 10**

**Тема:** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера

**Цель:** научиться пользоваться методом Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Теория:** Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной, имеет вид

$$y' = f(x, y).$$

**Решением обыкновенного дифференциального уравнения** называется функция $\varphi(x)$, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество: $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

График решения $y = \varphi(x)$ называется **интегральной кривой. Задача Коши** для дифференциального уравнения состоит в том, чтобы найти решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$

**Формулы Эйлера** для $m$ приближённых значений решения задачи Коши с начальными данными $(x_0, y_0)$ на сетке отрезка $[a, b]$ с шагом $h$: $x_i = x_{i-1} + h$

, . $y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$ $(i = \overline{1, m})$

**Ход Работы**

На отрезке [0;1] с шагом $h=0{,}2$ найти приближенное решение дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$ методом Эйлера. Чему равно значение y(1) ?

1. Вычислите все значения $x_{i+1}=x_i+h$ для $i=0,1,\ldots5$ на отрезке [0;1] с шагом $h=0{,}2$ , начиная с $x_0=0$. Все вычисления выполняйте с точностью до десятых.
2. Найдите соответствующие значения $y_{i+1}=y_i + h\cdot f(x_i, y_i)$ для $i=0,1,\ldots5$,
3. где $f(x_i, y_i)$ – правая часть Вашего дифференциального уравнения.
4. Результаты вычислений пунктов №1 и №2 оформите в виде таблицы.

| **№ варианта** | **Дифференциальное уравнение** | **Начальное условие** |
|---|---|---|
| **1.** | $y'=y-x^2$ | $y(0)=2$ |
| **2.** | $y'=y+x^2-1$ | $y(0)=-1$ |
| **3.** | $y'=y-x^2+1$ | $y(0)=2$ |
| **4.** | $y'=y+x^2$ | $y(0)=1$ |
| **5.** | $y'=y+x^2+1$ | $y(0)=1$ |
| **6.** | $y'=y-x^2+2$ | $y(0)=2$ |
| **7.** | $y'=y+x^2-2$ | $y(0)=-1$ |

5. На координатной плоскости постройте ломаную $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$ из найденных точек $P_i (x_i ,y_i )$.
6. Найдите значение y(1).

| | | |
|---|---|---|
| **8.** | $y'=y-x^2-1$ | $y(0)=2$ |
| **9.** | $y'=y+x^2+3$ | $y(0)=1$ |
| **10.** | $y'=y+x^2-3$ | $y(0)=1$ |
| **11.** | $y'=y-2x^2$ | $y(0)=2$ |
| **12.** | $y'=y+2x^2+1$ | $y(0)=-1$ |
| **13.** | $y'=y-x^3+1$ | $y(0)=2$ |
| **14.** | $y'=y+x^3$ | $y(0)=1$ |
| **15.** | $y'=y+x^3+1$ | $y(0)=1$ |

**Контрольные вопросы:**

1. Какую задачу называют задачей Коши?
2. Что мы получаем в результате решения дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$ численным методом?
3. В чём заключается метод Эйлера?