Калужский филиал ПГУПС

Методическая разработка

по теме:

«ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ»

(для студентов и преподавателей математики на первом курсе обучения)

ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

Мифтаховой Ф.А.

Фроловой Е.А.

Тарасовой Е.Н.

Калуга 2017 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное методическое пособие является сборником материалов для практических занятий на уроках математики первого курса обучения.

Темы практических занятий соответствуют рабочей программе по математике среднего (полного) общего образования базового уровня.

Подбор заданий соответствует требованиям к результатам обучения математике, отраженных в рабочей программе.

К каждому практическому занятию подобран теоретический материал, отражающий методические рекомендации для выполнения заданий; приведены примеры задач с подробным описанием их решения. Задания для самостоятельного решения представлены в нескольких вариантах (от трёх до шести вариантов), что позволяет наиболее объективно оценить работу студентов. Для подготовки студентов к защите своего решения приведены контрольные вопросы.

Практическое занятие №1

Тема: **Применение формулы сложных процентов**

Цель: Закрепить навыки в решении задач на проценты.

Теория: 1. Решение задач на применение основных понятий о процентах.

Сотая часть метра - это сантиметр, сотая часть рубля – копейка, сотая часть центнера - килограмм. Люди давно заметили, что сотые доли величин удобны в практической деятельности. Потому, для них было придумано специальное название – процент. Значит одна копейка – один процент от одного рубля, а один сантиметр – один процент от одного метра.

Один процент – это одна сотая доля числа. Математическими знаками один процент записывается так: 1%.

Определение одного процента можно записать равенством: **1 % = 0,01 * a**

5%=0,05, 23%=0,23, 130%=1,3 и т. д

Как найти 1% от числа? Так 1% это одна сотая часть, то надо число разделить на 100. Деление на 100 можно заменить умножением на 0,01. Поэтому, чтобы найти 1% от данного числа, нужно умножить его на 0,01. А если нужно найти 5% от числа, то умножаем данное число на 0,05 и т.д.

Пример. Найти: 25% от 120.

Решение:
1) 25% = 0,25;
2) 120 · 0,25 = 30. Ответ: 30.

Правило 1. Чтобы найти данное число процентов от числа, нужно проценты записать десятичной дробью, а затем число умножить на эту десятичную дробь

Пример. Токарь вытачивал за час 40 деталей. Применив резец из более прочной стали, он стал вытачивать на 10 деталей в час больше. На сколько процентов повысилась производительность труда токаря?

Решение: Чтобы решить эту задачу, надо узнать, сколько процентов составляют 10 деталей от 40. Для этого найдем сначала, какую часть составляет число 10 от числа 40. Мы знаем, что нужно разделить 10 на 40. Получится 0,25. А теперь запишем в процентах – 25%. Получаем ответ: производительность труда токаря повысилась на 25%.

Правило 2. Чтобы найти, сколько процентов одно число составляет от другого, нужно разделить первое число на второе и полученную дробь записать в виде процентов.

Пример. При плановом задании 60 автомобилей в день завод выпустил 66 автомобилей. На сколько процентов завод выполнил план?

Решение: 66:60=1,1 - такую часть составляют изготовленные автомобили от количества автомобилей по плану. Запишем в процентах =110% Ответ: 110%

Правило 3. Чтобы найти процентное отношение двух чисел А и В, надо отношение этих чисел умножить на 100%, то есть вычислить (а/в)*100%.

Пример. Найти число, если 15% его равны 30.
Решение:
1) 15% = 0,15;
2) 30 : 0,15 = 200.
или: x - данное число; $0{,}15 \cdot x = 30$; x = 200. Ответ: 200.

Правило 4. Чтобы найти число по данной величине его процентов, надо выразить проценты в виде дроби, а затем значение величины его процентов разделить на эту дробь.

2. Решение задач на понятия "процентное содержание", "концентрация",

"%-й раствор".

Процентное содержание. Процентный раствор.

Пример. Сколько кг соли в 10 кг соленой воды, если процентное содержание соли 15%.

Решение. $10 \cdot 0{,}15 = 1{,}5$ (кг) соли. Ответ: 1,5 кг.

Процентное содержание вещества в растворе (например, 15%), иногда называют %-м раствором, например, 15%-й раствор соли.

Концентрация.

Если концентрация вещества в соединении по массе составляет р%, то это означает, что масса этого вещества составляет р% от массы всего соединения.

Пример. Концентрация серебра в сплаве 300 г составляет 87%. Это означает, что чистого серебра в сплаве 261 г.

Решение. $300 \cdot 0{,}87 = 261$ (г).

В этом примере концентрация вещества выражена в процентах.

Отношения объема чистой компоненты в растворе ко всему объему смеси называется объемной концентрацией этой компоненты.

Сумма концентраций всех компонент, составляющих смесь, равна 1.

Если известно процентное содержание вещества, то его концентрация находится по формуле: $К=p/100\%$ к - концентрация вещества; р - процентное содержание вещества (в процентах).

Пример. К 15 л 10%-ного раствора соли добавили 5%-ный раствор соли и получили 8%-ный раствор. Какое количество литров 5%-ного раствора добавили?

Решение**.** Пусть добавили х л 5%-ного раствора соли. Тогда нового раствора стало $(15 + x)$ л, в котором содержатся $0{,}8 \cdot (15 + x)$ л соли. В 15 л 10%-ного раствора содержится $15 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$ (л) соли, в х л 5%-ного раствора содержится $0{,}05x$ (л) соли. Составим уравнение.

$1{,}5 + 0{,}05x = 0{,}08 \cdot (15 + x)$;
$x = 10$ Ответ: добавили 10 л 5%-ного раствора

3. Решение задач с использованием понятия коэффициента увеличения.

Чтобы увеличить положительное число а на р процентов, следует умножить число а на коэффициент увеличения $к=(1+0{,}01p)$.

Чтобы уменьшить положительное число а на р процентов, следует умножить число а на коэффициент уменьшения $к= (1-0{,}01p)$.

Формула сложных процентов: $N=a\cdot(1+0{,}01p)^n$, где а-первоначальная величина вклада, n-срок вклада, N- величина вклада через n лет, р- число процентов.

Пример. В феврале цена на нефть увеличилась на 12% по сравнению с январской. В марте цена нефти упала на 25%. На сколько процентов мартовская цена изменилась по сравнению с январской?

Решение. Если x – январская цена нефти, то февральская цена нефти равна

$(1 + 0{,}01*12)x = 1{,}12x$. Чтобы вычислить мартовскую цену у на нефть, следует умножить февральскую цену $1{,}12x$ на $(1-0{,}01*25)=0{,}75$, т.е. $y=0{,}75 \cdot 1{,}12x=0{,}84x$, мартовская цена отличается от январской на $(0{,}84x)/x100 - 100=84-100= -16(\%)$, т.е. цена упала на 16 %. Ответ: цена упала на 16%.

Правило 5. Чтобы найти, на сколько % положительное число у отличается от положительного числа а , следует вычислить, сколько % у составляет от а, а затем от полученного числа отнять а.

Ход работы

1. Изучить теоретическую часть практической работы.

2. Решить задачи своего варианта.

3. Сделать вывод.

Задание

1Вариант

1. Фасоль содержит 23% белка, 55% крахмала и 1,8% жиров. Сколько килограммов белка, крахмала и жиров содержится в 15 кг фасоли?
2. Вклад, вложенный в сбербанк два года назад, достиг суммы, равной 13125 руб. Каков был первоначальный вклад при 25% годовых?

2 Вариант

1. По плану добыча нефти-161 млн.т, фактически же добыча составила 166 млн.т. На сколько процентов был выполнен план?
2. Банк предлагает вклад «студенческий». По этому вкладу, сумма, имеющаяся на 1 января, ежегодно увеличивается на одно и то же число процентов. Вкладчик положил 1 января 1000 руб. и в течение 2 лет не производил со своим вкладом никаких операций. В результате вложенная им сумма увеличилась до 1210 руб. На сколько процентов ежегодно увеличивалась сумма денег, положенная на этот вклад?

3 Вариант

1. Команда набрала в шахматном турнире 40 очков, что составляет 80% сыгранных партий. Сколько партий сыграли на турнире шахматисты этой команды?

2. Сбербанки начисляют по вкладам ежегодно 2% вклада. Вкладчик внёс в сберегательный банк 1500 рублей. Какой станет сумма вклада через 2 года?

Контрольные вопросы

1. Как найти заданное число процентов от данного числа?
2. Как найти всё число по данной величине его процентов?
3. Как найти процентное отношение двух чисел?

Практическое занятие №2

Тема: Исследование графика функции

Цель: Приобрести знания по исследованию графика функции.

Теория: <u>1.Определение свойств функции по её графику.</u>

Функция $y=f(x)$ задана своим графиком. Укажите:

а) область определения функции;

б) область значений функции;

в) точки пересечения с осью ОУ;

г) при каких X $f(x)>0$;

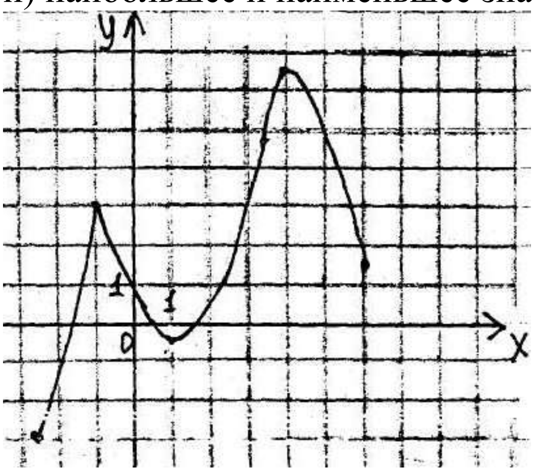
д) нули функции;

е) при каких значениях X $f(x) \leq -0,5$;

ж) точки экстремума функции;

з) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

и) наибольшее и наименьшее значение.



Ответ: а) Д(f) $\in$ [-2,5; 6];

б) E(f) $\in$[-3; 6,5]

в) (0; 1)

г) $x \in (-1,7; 0,5)$ и $x \in (1,5; 6]$

д) x=-1,7 ; x=0,5 ; x=1,5

е) $f(x) \leq -0,5$ при $x \in [-2,5; -1,7]$ и x=1

ж) точки экстремума x= -1; x= 1 и x=4;

з) возрастание на [-2,5;-1) и (1;4); убывание на (-1;1) и (4;6]

и) $f(4)=6,5$-наибольшее и $f(-2,5)=-3$-наименьшее

2.Изображение графика функции, заданной некоторыми свойствами.

1) Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

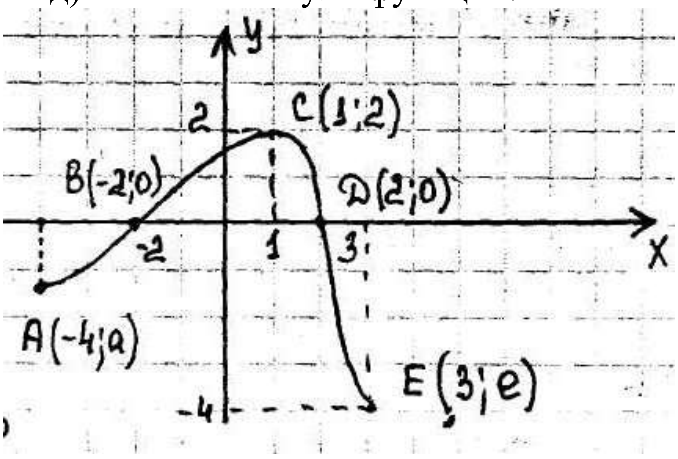
а) область определения функции есть промежуток [-4;3];

б) область значений функции составляет промежуток [-4;2]

в) функция возрастает на промежутке (-4;1), убывает на (1;3);

г) x=1-единственная точка экстремума;

д) x= -2 и x=2-нули функции.



Ответ: Один из возможных графиков (непрерывной) функции проходит от точки A (-4;a) через точки B(-2;0) , C(1;2), D(2;0) и до точки E(3;e).

Значения ординат точек A и E:

либо a=-4, тогда $-4 \leq e < 0$

либо e=-4, тогда $-4 \leq a < 0$.

2) Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

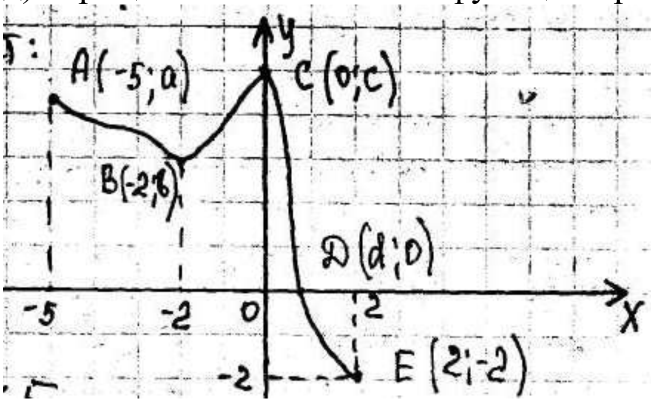
а) D(f)=[-5;2];

б) E(f)=[-2;5];

в) промежутки убывания функции [-5;2] и [0;2]

г) функция возрастает на промежутке [-2;0]

д) отрицательные значения функция принимает только в точках промежутка (1;2).



Ответ: Один из возможных графиков функции проходит от точки A(-5;a) через B(-2;b) C(0;c); D(d;0) до точки E(2;-2).

Значения ординат точек A, B, C: либо a=5, тогда $0 \leq b < a$ b<c$\leq$5;

либо c=5, тогда 0<a$\leq$5 и 0$\leq$b<a;

абсцисса точки D может принимать значения 0<d<1.

Ход работы

1. Изучить теоретическую часть практической работы.

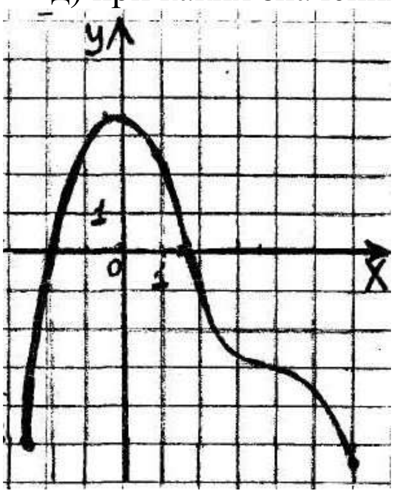
2. Решить задачи своего варианта.

3. Сделать вывод.

Задания

Вариант-I

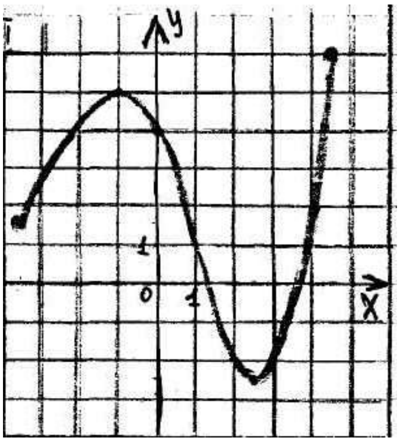
1. Функция y=f(x) задана своим графиком. Укажите:
а)область определения;
б)промежутки возрастания и промежутки убывания;
в)при каких значениях x f(x)=0
г)наибольшее и наименьшее значения функции;
д) при каких значениях x -4<f(x)<2



2. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
а) D(f)=[-3;5];
б)E(f)=[-4;4];
в) в правом конце области определения функция принимает наибольшее значение;
г) x=-1 –единственная точка экстремума

Вариант-II

1.Функция y=f(x) задана графиком. Укажите:
а)область определения;
б)нули функции;
в)промежутки возрастания и промежутки убывания;
г)наибольшее и наименьшее значения функции;
д)при каких x f(x)<-2.



2. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) D(f)=[-3;4];

б)E(f)=[-2;5];

в) в левом конце области определения функция принимает наибольшее значение.

г) x= 2-единственная точка экстремума.

Вариант-III

1.Функция y=f(x) задана графиком. Укажите:

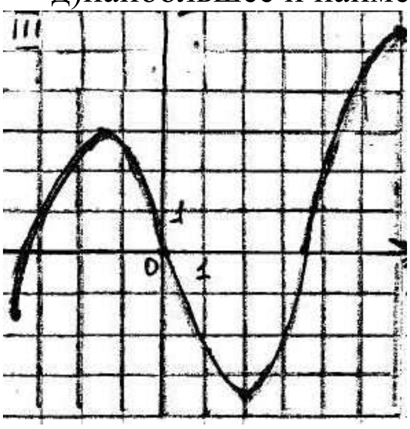
а)область определения;

б)при каких x $-2{,}5 \le f(x) \le 1{,}5$;

в)промежутки возрастания и промежутки убывания;

г) точки экстремума функции;

д)наибольшее и наименьшее значения функции.



2. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) D(f)=[-5;2];

б) E(f)=[-3;4];

в) в правом конце области определения функция принимает наибольшее значение.

г)значение функции отрицательны только в точках промежутка (-4;0)

Вариант IV

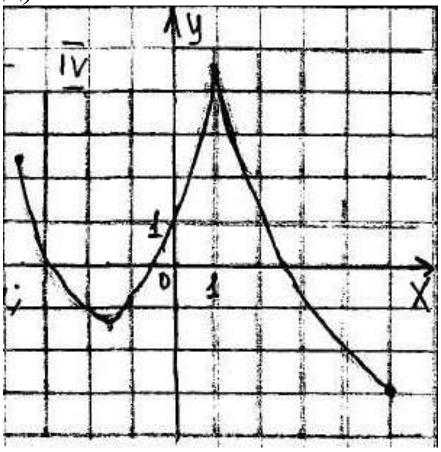
1.Функция y=f(x) задана графиком. Укажите:

а) область определения;

б) при каких x $f(x) \le 0$

в) точки экстремума функции;

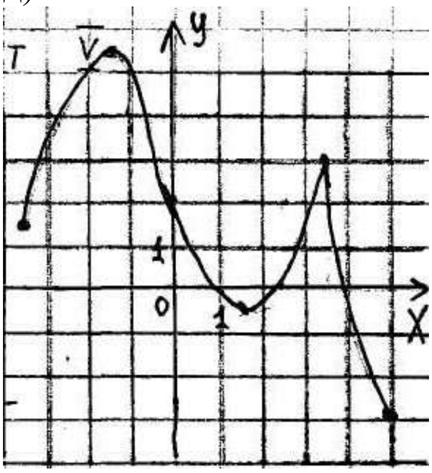
г) промежутки возрастания и убывания
д) наибольшее и наименьшее значения



2. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
а) $D(f)=[-4;3]$;
б) $E(f)=[-4;4]$;
в) в левом конце области определения функция принимает наибольшее значение;
г) значения функции отрицательны только в точках промежутка (-2;1);
д) -1-единственная точка экстремума функции.

Вариант V

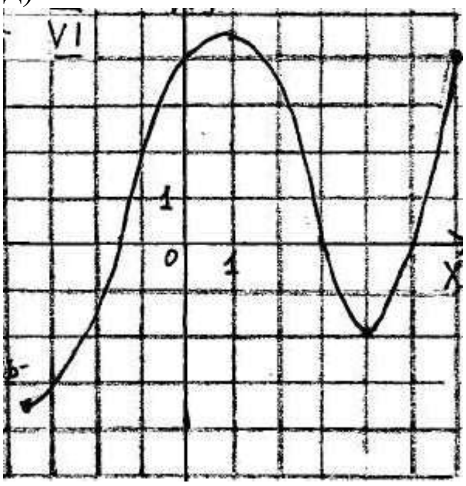
1.Функция $y=f(x)$ задана графиком. Укажите:
а) область определения;
б) при каких x $f(x) \leq 0{,}5$;
в) точки экстремума функции;
г) промежутки возрастания и убывания;
д) наибольшее и наименьшее значения.



2. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
а) $D(f)=[-2;5]$;
б) $E(f)=[-2;4]$;
в) убывает на (1;3); возрастает на (-2;1) и (3;5)
г) значения функции отрицательны только в точках промежутка (-2;-1,5).
д) $f(x)=0$ при x=3

Вариант VI

1.Функция y=f(x) задана графиком. Укажите:
а) область определения;
б) при каких x f(x)>2;
в) промежутки возрастания и убывания;
г) точки экстремума
д) наибольшее и наименьшее значения.



2. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
а) D(f)=[-1;8];
б) E(f)=[-4;2];
в) функция возрастает на промежутках [-1;3] и [5;8]; убывает на промежутке [3;5]
г) нули функции при x= 3 и x=7.

Контрольные вопросы:

1. Как с помощью графика функции найти область определения функции?
2. Как с помощью графика функции определить нули функции?
3. Как с помощью графика функции найти промежутки, на которых функция сохраняет постоянный знак?
4. Чем отличается наибольшее значение функции от максимального?
5. Как с помощью графика функции найти область значений функции?

Практическое занятие №3

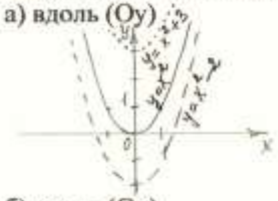
Тема: Преобразование графиков

Цель: закрепить умение строить графики функций с помощью последовательных преобразований.

Теория: <u>Виды преобразований графиков</u>.

I. Параллельный перенос вдоль осей координат.

а) вдоль (Оу)



правило 1: для a>0

$$f(x)\xrightarrow[\text{на а вверх}]{\text{сдвиг вдоль (Оу)}} f(x)+a$$

$$f(x)\xrightarrow[\text{на а вниз}]{\text{сдвиг вдоль (Оу)}} f(x)-a$$

б) вдоль (Ох)

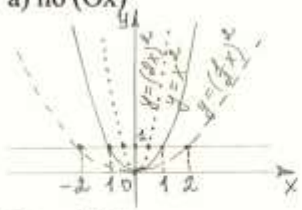
правило 2: для a>0

$$f(x)\xrightarrow[\text{на а влево}]{\text{сдвиг вдоль (Ох)}} f(x+a)$$

$$f(x)\xrightarrow[\text{на а вправо}]{\text{сдвиг вдоль (Ох)}} f(x-a)$$

II. Растяжение и сжатие по осям координат.

а) по (Ох)

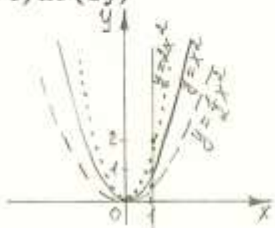


правило 3:

$$f(x)\xrightarrow[\text{в k раз}]{\text{сжатие по (Ох)}} f(k\cdot x), k>1$$

$$f(x)\xrightarrow[\text{в } \frac{1}{k} \text{ раз}]{\text{растяжение по (Ох)}} f(k\cdot x), 0<k<1$$

б) по (Оу)



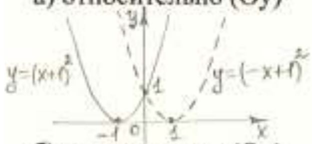
правило 4:

$$f(x)\xrightarrow[\text{в m раз}]{\text{растяжение по (Оу)}} m\cdot f(x),\ m>1$$

$$f(x)\xrightarrow[\text{в } \frac{1}{m} \text{ раз}]{\text{сжатие по (Оу)}} m\cdot f(x),\ 0<m<1$$

III. Симметрия относительно осей координат.

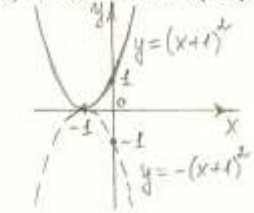
а) относительно (Оу)



правило 5:

$$f(x)\xrightarrow[\text{относительно (Оу)}]{\text{симметрия}} f(-x)$$

б) относительно (Ох)



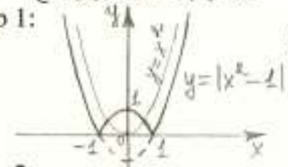
правило 6:

$$f(x)\xrightarrow[\text{относительно (Ох)}]{\text{симметрия}} -f(x)$$

IV. Графики функций, аналитическое выражение которых имеет знак модуля.

$$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x), \text{ если } f(x)\geq 0; \\ -f(x), \text{ если } f(x)<0. \end{cases} \qquad y=f(|x|)=\begin{cases} f(x), \text{ если } x\geq 0; \\ f(-x), \text{ если } x<0. \end{cases}$$

Пример 1:



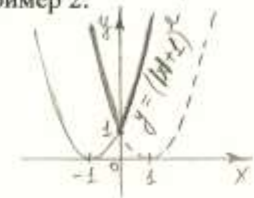
$$y=|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1, \text{ если } x^2-1\geq 0; \\ -(x^2-1), \text{ если } x^2-1<0. \end{cases}$$

1) $y=x^2$

2) $y=x^2-1$ (сдвиг на 1 вниз)

3) $y=|x^2-1|$

Пример 2:



$$y=(|x|+1)^2=\begin{cases} (x+1)^2, \text{ если } x\geq 0; \\ (-x+1)^2, \text{ если } x<0. \end{cases}$$

При $x\geq 0$ участок графика $y=(x+1)^2$,

при $x<0$ — участок графика $y=(-x+1)^2$

Ход работы

1. Изучить теоретическую часть практического занятия.
2. Выполнить задания своего варианта.
3. Сделать вывод.

Вариант 1

Задание 1. В результате некоторых преобразований из графика функции $y=2^x$ (рис. 1) получили график функции y=f(x). Какие преобразования произвели? Запишите уравнение функции y=f(x).

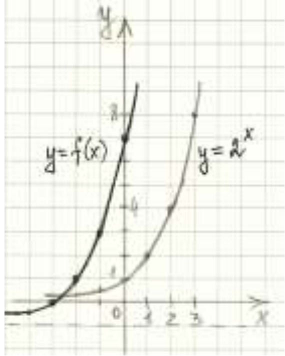


Рис. 1

Задание 2. Постройте графики функций с помощью последовательных преобразований:

а) $y=\sin(2x - \frac{\pi}{4})$;

б) $y= - |\mathrm{ctg}(x + \frac{\pi}{4})|$.

Контрольные вопросы:

1. Дать определение графика функции.
2. Как из графика функции y=f(x) получить графики функций y=f(x+a) и y=f(x)+b ?
3. При каких преобразованиях график функции y=f(x) сжимается вдоль оси (Ox)? Растягивается вдоль оси (Oy)? Симметрично отражается от оси (Oy)? Симметрично отражается от оси (Ox)?

Вариант 2

Задание 1. В результате некоторых преобразований из графика функции $y=\log_2 x$ (рис. 2) получили график функции y=f(x). Какие преобразования произвели? Запишите уравнение функции y=f(x).

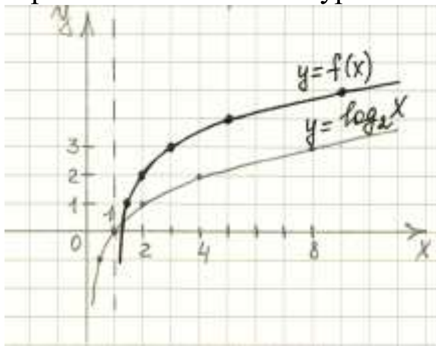


Рис. 2

Задание 2. Постройте графики функций с помощью последовательных преобразований:

а) $y= - \frac{1}{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$;

б) $y= |\mathrm{tg}(x - \frac{3\pi}{4})|$.

Контрольные вопросы:

1. Дать определение графика функции.
2. Как из графика функции y=f(x) получить графики функций y=f(x+a) и y=f(x)+b ?
3. При каких преобразованиях график функции y=f(x) сжимается вдоль оси (Ox)? Растягивается вдоль оси (Oy)? Симметрично отражается от оси (Oy)? Симметрично отражается от оси (Ox)?

Вариант 3

<u>Задание 1</u>. В результате некоторых преобразований из графика функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 3) получили график функции y=f(x). Какие преобразования произвели? Запишите уравнение функции y=f(x).

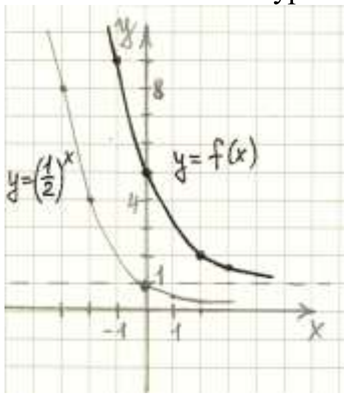


Рис. 3

<u>Задание 2</u>. Постройте графики функций с помощью последовательных преобразований:

а) $y= -\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $y= \left|\mathrm{ctg}\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\right|$.

Контрольные вопросы:

1. Дать определение графика функции.
2. Как из графика функции y=f(x) получить графики функций y=f(x+a) и y=f(x)+b ?
3. При каких преобразованиях график функции y=f(x) сжимается вдоль оси (Ox)? Растягивается вдоль оси (Oy)? Симметрично отражается от оси (Oy)? Симметрично отражается от оси (Ox)?

Вариант 4

<u>Задание 1</u>. В результате некоторых преобразований из графика функции $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ (рис. 4) получили график функции y=f(x). Какие преобразования произвели? Запишите уравнение функции y=f(x).

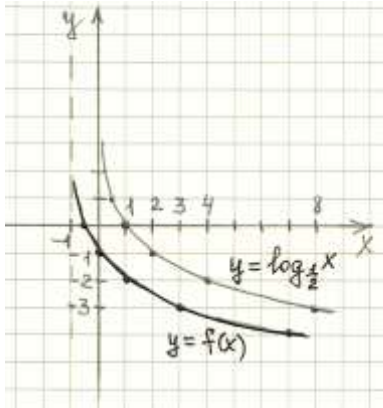


Рис. 4

<u>Задание 2</u>. Постройте графики функций с помощью последовательных преобразований:

а) $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $y= -\left|\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

Контрольные вопросы:

1. Дать определение графика функции.
2. Как из графика функции y=f(x) получить графики функций y=f(x+a) и y=f(x)+b ?
3. При каких преобразованиях график функции y=f(x) сжимается вдоль оси (Ox)? Растягивается вдоль оси (Oy)? Симметрично отражается от оси (Oy)? Симметрично отражается от оси (Ox)?

Вариант 5

Задание 1. В результате некоторых преобразований из графика функции $y=3^x$ (рис. 5) получили график функции y=f(x). Какие преобразования произвели? Запишите уравнение функции y=f(x).

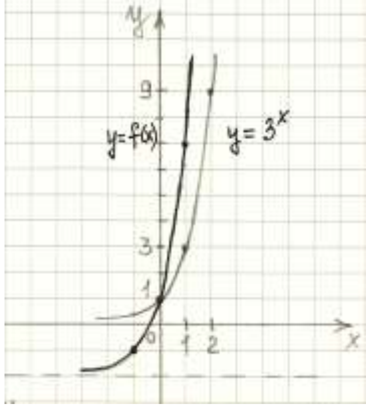


Рис. 5

Задание 2. Постройте графики функций с помощью последовательных преобразований:

а) $y=2\sin(x - \frac{\pi}{3})$;

б) $y= - |tg(x + \frac{\pi}{4})|$.

Контрольные вопросы:

1. Дать определение графика функции.
2. Как из графика функции y=f(x) получить графики функций y=f(x+a) и y=f(x)+b ?
3. При каких преобразованиях график функции y=f(x) сжимается вдоль оси (Ox)? Растягивается вдоль оси (Oy)? Симметрично отражается от оси (Oy)? Симметрично отражается от оси (Ox)?

Вариант 6

Задание 1. В результате некоторых преобразований из графика функции $y=\log_2 x$ (рис. 6) получили график функции y=f(x). Какие преобразования произвели? Запишите уравнение функции y=f(x).

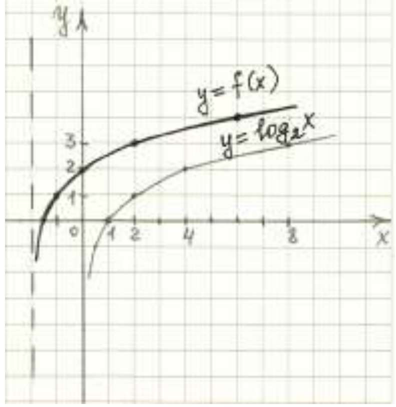


Рис. 6

Задание 2. Постройте графики функций с помощью последовательных преобразований:

а) $y=\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$;

б) $y= - |ctg(x + \frac{3\pi}{4})|$.

Контрольные вопросы:

1. Дать определение графика функции.
2. Как из графика функции y=f(x) получить графики функций y=f(x+a) и y=f(x)+b ?
3. При каких преобразованиях график функции y=f(x) сжимается вдоль оси (Ox)? Растягивается вдоль оси (Oy)? Симметрично отражается от оси (Oy)? Симметрично отражается от оси (Ox)?

Практическое занятие №4.

Тема: Изучение физического и геометрического смысла производной.

Цель работы: знать физический и геометрический смысл производной, уметь применять физический и геометрический смысл производной при решении задач.

Теория:

I. Физический смысл производной.

Какую бы зависимость ни выражала функция *y= f (x)*, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть средняя скорость изменения функции *f (x)* относительно аргумента *x*, а $f'(x_0)$- мгновенная скорость изменения функции *f (x)* при некотором значении $x=x_0$

Типы задач:

1)*Прямолинейное движение.*

$V(t) = S'(t)$

$a(t) = V'(t) = S''(t)$

2) *Криволинейное движение*.

Если твёрдое тело вращается вокруг оси, то угол поворота φ есть функция от времени *t*. Угловая скорость вращения ω в данный момент времени *t* численно равна производной $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \varphi'(t)$.

3) *Теплоёмкость тела*.

Теплоёмкость тела при температуре *T* есть производная

$C = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = Q'(T)$ где ΔQ - количество теплоты, необходимое для изменения температуры тела на ΔT.

4) *Сила тока*.

Сила тока *I* в проводнике в момент времени *t*, если функция $Q = f(t)$ выражает зависимость количества электрического заряда, прошедшее за время t через сечение проводника, равна производной $I = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Q'(t)$.

5) *Линейная плотность*.

Если известна масса *m(l)* любого куска неоднородного стержня длины l, то хотя стержень неоднороден, естественно полагать, что плотность его небольшой части (от l до $l + \Delta l$) примерно одна и та же, причём, чем меньше Δl, тем в меньших пределах на этом участке изменяется плотность. Поэтому за характеристику распределения плотности стержня в зависимости от l принимают линейную плотность $d(l) = m'(l)$

6) *Мощность*.

$$W = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

Мгновенная мощность есть производная работы по времени; ΔA - работа, совершаемая за время Δt.

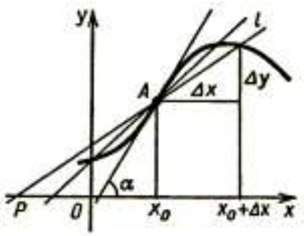
$W = A'(t)$

7) *Электромагнитная индукция*.

$$\varepsilon_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

$\Delta \Phi$- изменение магнитного потока за время $\Delta t \Rightarrow$ мгновенное значение ЭДС индукции есть производная магнитного потока по времени $e = -\Phi'(t)$. Аналогично: $\varepsilon_{ci} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow e_{ci} = -L \cdot I'(t)$

II. <u>Геометрический смысл производной</u>.



$k_{кас} = tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ - угловой коэффициент касательной;

$y=f(x_0)+ f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ – уравнение касательной к графику функции, где $(x_0;y_0)$ – координаты точки касания.

Типы задач:

1) *Нахождение уравнения касательной.*

Составить уравнение касательной к кривой $y=x^3 - x^2$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Точка касания $x_0=1$; $y_0= x_0^3 - x_0^2 = 1^3 - 1^2 = 0$.

$y' = 3x^2 - 2x \Rightarrow k = y'(1) = 3\cdot 1^2 - 2\cdot 1 = 1 \Rightarrow$ уравнение касательной:

$y = 0 + 1(x-1) = x - 1$

2) *Нахождение* ***k****кас* *и углов.*

1. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y = x^2 - 4x - 17$, проведённая в точке с абсциссой $x_0 = 2{,}5$?

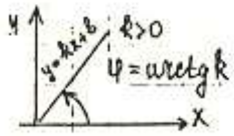
   $f'(x) = 2x - 4;\ k = f'(2{,}5) = 1;\ tg\,\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

2. Найти угол между касательными к графику функции $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1,$ проведёнными в точках с абсциссами 0 и 1 ($0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ по определению)

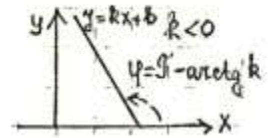
   $f'(x) = 3x^2 + 8x + 3.$

   а) $x_0 = 0;\ f(x_0) = 1;\ f'(x_0) = 3;$

   $k_1 = tg\varphi_1 = 3 \Rightarrow \varphi_1 = arctg\,3;$



уравнение касательной $y=3x+1$



б) $x_0 = 1;\ f(x_0) = 1;\ f'(x_0) = -2;$

$k_2 = tg\varphi_2 = -2 \Rightarrow \varphi_2 = \pi - arctg\,2;$

уравнение касательной $y=-2x+3$

$\alpha = \pi - arctg\,2 - arctg\,3$

3) *Определение точки графика по касательной.*

Найти на графике функции $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 1$ точку, касательная в которой образует с (Ox) угол $\frac{\pi}{4}$.

$tg\frac{\pi}{4} = 1;\ tg\varphi = k;\ k = f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 1.$

$$f'(x) = 9x^2 - 8x;\ \ f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{01} = 1;\ f(x_{01}) = 1 \\ x_{02} = -\frac{1}{9};\ f(x_{02}) = \frac{230}{243} \end{array}\right. .$$

4) *Нахождение уравнения функции.*

Найти уравнение параболы $y = x^2 + bx + c,$ касающейся прямой $y=x$ в точке $M(1;1)$.

$M(1;1)$ ϵ графику функции $y = x^2 + bx + c$. Уравнение касательной в точке $M(1;1)$: $y=x \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 1$.

$$f'(x_0) = 2x + b \Rightarrow \begin{cases} 1 + b + c = 1 \\ 2 + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow y = x^2 - x + c$$

Ход работы

1. Изучить теоретическую часть практического занятия.
2. Выполнить задания своего варианта.

3. Сделать вывод.

Вариант 1.	*Вариант 2.*
<u>Задание 1</u>. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $S=\frac{1}{3}t^3+2t^2-3.$ Вычислить её скорость в момент времени *t=4 с*. <u>Задание 2</u>. Составить уравнение касательной к параболе $y=x^2-6x+5$ в точке с абсциссой *x=4*	<u>Задание 1</u>. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $S=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+2.$ Вычислить её скорость в момент времени *t=5 с*. <u>Задание 2</u>. Составить уравнение касательной к параболе $y=2x^2-5x-3$ в точке с абсциссой *x=2*.
Вариант 3.	*Вариант 4.*
<u>Задание 1</u>. Скорость точки, движущейся прямолинейно задана уравнением $\upsilon=2t^2-5t+6.$ В какой момент времени ускорение точки будет равно $2\frac{м}{с^2}$? <u>Задание 2</u>. Составить уравнение касательной к параболе $y=x^2+6x+8$ в точке с абсциссой *x=-2*.	<u>Задание 1</u>. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $S=\frac{1}{3}t^3-2t^2+3.$ Вычислить её ускорение в момент времени *t=3 с*. <u>Задание 2</u>. Составить уравнение касательной к параболе $y=x^2+2x-8$ в точке с абсциссой *x=2*.

Вариант 5.	*Вариант 6.*
<u>Задание 1</u>. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении тел задана уравнениями: $S_1=\frac{1}{3}t^3+2t^2-45$ $S_2=\frac{1}{2}t^2+4t+115$ В какой момент времени их скорости будут равны? <u>Задание 2</u>. Составить уравнение касательной к параболе $y=2x^2-12x+20$ в точке с абсциссой *x=4*.	<u>Задание 1</u>. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении двух тел задана уравнениями: $S_1=\frac{2}{3}t^3+t^2-t+14$ $S_2=\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+11t-8$ В какой момент времени их скорости будут равны? <u>Задание 2</u>. Составить уравнение касательной к параболе $y=2x^2-12x+16$ в точке с абсциссой *x=5*.

Контрольные вопросы:

1. Каков физический смысл производной?
2. Каков геометрический смысл производной?
3. Напишите уравнение касательной к произвольной кривой.

Практическое занятие №5.

Тема: Применение определённого интеграла в задачах по физике.

Цель: закрепить навыки в решении физических задач с применением определённого интеграла.

Теория:

I. *Путь, пройденный телом*.

Если V(t) – скорость прямолинейно движущейся точки в момент времени t, то перемещение точки, т.е. приращение её координаты, за промежуток времени [a;b] равно:

$$X = \int_a^b V(t)dt$$

Если $V(t) \geq 0$ на промежутке [a;b], то интеграл $\int_a^b V(t)dt$ равен пути, пройденному точкой.

Пример 1: Скорость движения тела задана уравнением $\upsilon = 3t^2 + 2t - 1$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 10 с от начала движения.

Решение: $t_1 = 0$; $t_2 = 10c$; $\upsilon(t) = 3t^2 + 2t - 1$

$$S = \int_0^{10} (3t^2 + 2t - 1)dt = (t^3 + t^2 - t)\Big|_0^{10} = 1090 \text{ м.}$$

Пример 2: Тело брошено с поверхности Земли вертикально вверх со скоростью $\upsilon = 39{,}2 - 9{,}8t$ (м/с). Найти наибольшую высоту подъёма тела.

Решение: условие max. подъёма $\upsilon = 0$; $39{,}2 - 9{,}8t = 0 \Leftrightarrow t = 4c$

$$S = \int_0^4 (39{,}2 - 9{,}8t)dt = (39{,}2t - 4{,}9t^2)\Big|_0^4 = 78{,}4м$$

II. *Работа силы*.

Если материальная точка движется вдоль оси Ох под действием переменной силы, проекция F(x) которой на ось Ох есть функция от координаты x, то работа силы по перемещению точки из положения x=a в положение x=b равна:

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

Пример 1: Пружина растягивается на 0,02 м под действием силы в 60 Н. Какую работу она производит, растягивая её на 0,12м?

Решение: При F=60H x=0,02. По формуле F=kx:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{60}{0{,}02} = 3000\frac{H}{м}.$$

$$A = \int_0^{0{,}12} 3000xdx = 3000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}12} = 21{,}6Дж.$$

Пример 2: Для растяжения пружины на 0,04 м необходимо совершить работу 20 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу в 80 Дж?

Решение: 1. $20 = \int_0^{0{,}04} kxdx = k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}04} = 0{,}0008k \Rightarrow k = \frac{20}{0{,}008} = 25 \cdot 10^3$

2. $A = \int_0^{x_1} kxdx$; где x_1-длина, на которую растянута пружина при совершенной работе в 80 Дж.

$$80 = \int_0^{x_1} 25 \cdot 10^3 xdx = 25000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_1} = 12500x_1^2 \Rightarrow x_1^2 = \frac{80}{12500} \Rightarrow x_1 = \frac{4}{50} = 0{,}08м.$$

Ход работы

1. Изучить теоретическую часть практического занятия.
2. Выполнить задания своего варианта.
3. Сделать вывод.

ЗАДАНИЯ

Вариант 1.	Вариант 2.
1. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $\upsilon = 3t^2 - 2t - 1$. Вычислить её путь за 5с от начала движения. 2. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 0,03м, если для сжатия её на 0,02м была затрачена работа 30Дж.	1. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $\upsilon = 6t^2 - 10t$. Вычислить её путь за третью секунду. 2. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 0,08м, если для сжатия её на 0,01м нужна сила 10 Н.
Вариант 3.	*Вариант 4.*
1. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $\upsilon = 9t^2 - 2t - 8$. Вычислить её путь за 3с от начала её движения. 2. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 0,1м, если для сжатия её на 0,05м затрачена работа 25Дж.	1. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $\upsilon = 3t^2 - 2t + 5$. Вычислить её путь за четвёртую секунду. 2. Вычислить работу, совершенную при растяжении пружины на 0,06м, если для растяжения её на 0,03м нужна сила 15Н.

Вариант 5.	Вариант 6.
1. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $\upsilon = 6t^2 - 4t - 10$. Вычислить её путь за 4с от начала движения. 2. Вычислить работу, совершённую при сжатии пружины на 0,06м, если для сжатия её на 0,01м нужна сила 10Н.	1. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $\upsilon = 24t - 6t^2$. Вычислить её путь от начала движения до остановки. 2. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 0,04м, если для сжатия её на 0,01м нужна сила 20Н.

Контрольные вопросы:

1. Напишите формулу для прохождения пути, пройденного телом, на промежутке [a;b].
2. Напишите формулу для нахождения работы силы по перемещению точки из положения a в положение b.
3. Каков геометрический смысл определённого интеграла?

Практическое занятие №6

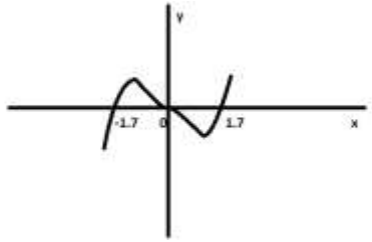
Тема: Графическое решение кубических уравнений
Цель: повторить исследование функции с помощью производной, научиться решать кубические уравнения.
Теория:
<u>*Схема исследования функции с помощью производной:*</u>
1) Найти область определения функции y=f(x).
2) Найти производную функции.
3) Вычислить критические точки.
4) Интервалы монотонности и знак производной в каждом интервале.
5) Найти x_{max} и x_{min}.
6) Найти y_{max} и y_{min}.
7) Построить график: используя результаты исследования, соединить полученные точки плавной кривой (с учётом области определения). Иногда для большей точности графика находят несколько дополнительных точек; их координаты вычисляют, пользуясь уравнением кривой.
<u>*Пример:*</u> Решить графически кубическое уравнение

$$\frac{1}{3}\cdot x^3 - x = 0$$

а) построим график функции $y = \frac{1}{3}\cdot x^3 - x$

1) D(y)=R
2) $y'(x)=(\frac{1}{3}\cdot x^3 - x)' = x^2-1$
3) критические точки: $y'(x)=0$
$x^2-1=0$; $(x-1)\cdot(x+1)=0$; $x_1=1$, $x_2=-1$.
4) интервалы монотонности и знак первой производной в каждом интервале:

$y'(0)=-1<0$; $y'(2)=3>0$; $y'(-2)=3>0$
5) $x_{max}=-1$; $x_{min}=1$
6) $y_{max}=\frac{2}{3}$; $y_{min}=-\frac{2}{3}$
7) построим график:



б) Найдём абсциссы точек пересечения графика функции с осью (Ox): $x_1=0$, $x_2\approx1{,}7$ и $x_3\approx-1{,}7$.

Ход работы

1. Изучить теоретическую часть практического занятия.
2. Выполнить задания своего варианта:
   а) задать функцию, исследовать её с помощью производной и построить график;
   б) найти абсциссы точек пересечения графика с осью (Ox).
3. Сделать вывод.

ЗАДАНИЯ

Решить графически кубическое уравнение:
Вариант 1: $2+3x-x^3=0$
Вариант 2: $x^3+6x^2+9x=0$
Вариант 3: $x^3-3x^2+4=0$
Вариант 4: $-x^3+4x^2-4x=0$
Вариант 5: $x^3-\frac{9}{2}x^2+6x-2=0$
Вариант 6: $-x^3+2x^2-x=0$

Контрольные вопросы.

1. Дать определение точек экстремума.
2. Сформулировать признаки возрастания/убывания функции с помощью первой производной.
3. Дать определение критических точек.

Практическое занятие №7

Тема: Решение систем линейных уравнений.

Цель: Закрепить навыки в решении систем линейных уравнений графическим способом и методом Крамера.

Теория: *Системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

Способы решения систем линейных уравнений:

1. Способ подстановки

$$\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3x+8y=1 \end{cases} \quad y=-(4+2x)/3 \quad \begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3x-8(4+2x)/3=1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=2 \\ x=-5 \end{cases}$$

2. Способ алгебраического сложения

$$\left\{\begin{array}{l|l} 4x-7y=-12 & *(-3) \\ 6x+3y=-18 & *\ 2 \end{array}\right. \quad \begin{cases} -12x+21y=36 \\ 12x+6y=-36 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ 4x-7y=-12 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=-3 \end{cases}$$

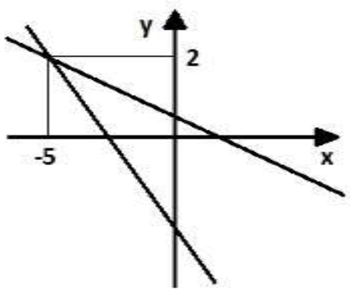
3. Графический способ – отыскание координат общих точек графиков.

$$\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3x+8y=1 \end{cases}$$

Составим таблицы для построения прямых:

x	-2	0
y	0	-1,3

x	0	1/3
y	1/8	0



Ответ: (-5; 2)

4. Метод Крамера

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$ – определитель системы

$$\Delta x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad x=\Delta x/\Delta;\ \ y=\Delta y/\Delta$$

1. $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение
2. $\Delta = 0$; $\Delta x=\Delta y=0$ (каждый) – бесконечное множество решений
3. $\Delta = 0$; $\Delta x\neq 0$; $\Delta y\neq 0$ (хотя бы один) – нет решений

Ход работы

1) Изучить теоретическую часть практического занятия.
2) Выполнить задания своего варианта.
3) Сделать вывод.

ЗАДАНИЯ

Решить систему линейных уравнений графическим способом и методом Крамера.

Вариант 1:

1) $\begin{cases} 3x+8y=31 \\ 10x+7y=5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -2y+3x=5 \\ 6x-4y=11 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-3y=11 \\ -9y+6x=33 \end{cases}$

Вариант 2:

1) $\begin{cases} -x+2y=-5 \\ 7x-3y=13 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+3y=7 \\ 6y+10x=2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5y+2x=3 \\ 4x+10y=6 \end{cases}$

Вариант 3:

1) $\begin{cases} 3x+4y=18 \\ 2x+5y=19 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 6x-4y=2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 4x-6y=3 \end{cases}$

Контрольные вопросы:

4. Перечислить способы решения систем линейных уравнений.
5. По методу Крамера:

   А) Когда система имеет единственное решение?
   Б) Когда система имеет бесконечное множество решений?
   В) Когда система не имеет решений?

Практическое занятие №8.

Тема: Исследование уравнения и неравенства с параметром

Цель: закрепить умение исследовать уравнения и неравенства с параметром.

Теория:

I. Понятие параметра.

Если в уравнении или неравенстве некоторые коэффициенты заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами, то они называются *параметрами*, а уравнение или неравенство − *параметрическим*.

Решить уравнение или неравенство с параметрами означает:

1) определить, при каких значениях параметров существуют решения;
2) для каждой допустимой системы значений параметров найти соответствующее множество решений.

Существуют другие формы условий задач с параметрами – исследовать уравнение, определить количество решений, найти положительные решения и др.

II. Исследование уравнения с параметром.

Рассмотрим, как исследуются уравнения с параметром на примере квадратных уравнений.

Пример1. При каких a уравнение $a\cdot x^2+x-5=0$ имеет единственное решение?

Решение: При $a=0$ уравнение принимает вид $x-5=0$ и имеет единственное решение $x=5$.

При $a\neq 0$ и $D=0$ уравнение также имеет единственное решение: $D=1^2-4\cdot a\cdot(-5)=1+20a$, $1+20a=0$ при $a=-\dfrac{1}{20}$.

Ответ: $a=-\dfrac{1}{20}$, $a=0$.

Пример2. Найти наименьшее целое число a, при котором уравнение $x^2+(2a+3)x+a^2-a+5=0$ имеет два различных корня.

Решение: Уравнение имеет два различных корня, если $D>0$, т.е. $(2a+3)^2-4(a^2-a+5)>0$

$$4a^2+12a+9-4a^2+4a-20>0$$

$$16a-11>0$$

$$a>\frac{11}{16}$$

Наименьшее целое значение $a\in\left(\dfrac{11}{16};+\infty\right)$ равно 1.

Ответ: $a=1$.

III. Исследование неравенства с параметром.

Рассмотрим, как исследуются неравенства с параметром на примере линейных неравенств.

Пример1. Решить неравенство $a\cdot x+4>2x+a^2$.

Решение: $ax+4>2x+a^2 \Leftrightarrow (a-2)x>a^2-4$. Рассмотрим три случая:

1. $a=2$. Неравенство $0\cdot x>0$ решений не имеет.
2. $a>2$. $(a-2)\cdot x>(a-2)(a+2) \Leftrightarrow x>a+2$.
3. $a<2$. $(a-2)\cdot x>(a-2)(a+2) \Leftrightarrow x<a+2$.

Ответ: $x>a+2$ при $a>2$; $x<a+2$ при $a<2$; нет решений при $a=2$.

Пример2. Решить неравенство $(a^2-2a-3)x-a<0$.

Решение: $(a^2-2a-3)\cdot x-a<0 \Leftrightarrow (a+1)(a-3)x<a$. Рассмотрим следующие случаи:

1. $a=-1$. Неравенство $0\cdot x<-1$ решений не имеет.
2. $a=3$. Решением неравенства $0\cdot x<3$ является любое действительное число.
3. $a\in(-1;3)$. Тогда $(a+1)(a-3)<0$, поэтому
$$(a+1)(a-3)x<a \Leftrightarrow x>\frac{a}{(a+1)(a-3)}.$$
4. $a\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. Так как $(a+1)(a-3)>0$, то $(a+1)(a-3)x<a \Leftrightarrow x<\frac{a}{(a+1)(a-3)}$.

Ответ: $x<\frac{a}{(a+1)(a-3)}$ при $a\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$; $x>\frac{a}{(a+1)(a-3)}$ при $a\in(-1;3)$; $x\in R$ при $a=3$; нет реше-ний при $a=-1$.

Ход работы

4. Изучить теоретическую часть практического занятия.
5. Выполнить задания своего варианта.
6. Сделать вывод.

ЗАДАНИЯ

Вариант 1

1) При каких значениях a уравнение $(a-3)\cdot x^2+(6-2a)\cdot x+1=0$ имеет единственное решение?
2) Решить неравенство $a\cdot(3x-1)>3x-2$.

Вариант 2

1) При каких значениях a уравнение $(a-2)\cdot x^2-2ax+(2a-3)=0$ имеет один корень?
2) Решить неравенство $3x-a>a\cdot x-2$.

Вариант 3

1) При каких значениях a уравнение $(a-2)x^2+(4-2a)\cdot x+3=0$ имеет единственное решение?
2) Решить неравенство $6a+2x<1-a\cdot x$.

Контрольные вопросы:

1. Что такое *параметр* в уравнении или неравенстве?
2. Что значит *решить уравнение или неравенство с параметром*?
3. Каков принцип исследования параметрических квадратных уравнений на количество решений?
4. Почему приходится рассматривать так много случаев при решении параметрических линейных неравенств?

Практическое занятие №9.

Тема: Построение точки и вектора в пространстве

Цель: закрепить умение строить точки и векторы в пространстве, вычислять координаты и длину векторов, определять перпендикулярность векторов.

Теория:

I. Построение точки в пространстве по заданным координатам.

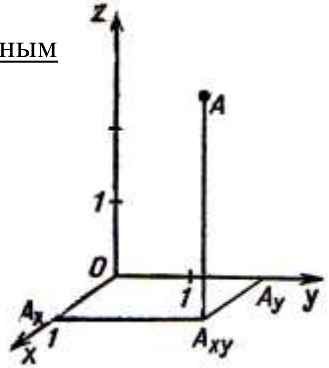


Рис. 1

Пусть дана точка А (1;2;3). Опишем подробно построение этой точки (рис.1):

а) От точки О откладываем единичный отрезок по оси *x*, получаем точку A_x (1;0;0).

б) Далее от точки A_x параллельно оси *y* откладываем два единичных отрезка, получаем точку A_{xy} (1;2;0).

в) Наконец, от точки A_{xy} «поднимаемся» вдоль оси *z* на три единичных отрезка, получаем точку А (1;2;3).

II. Построение вектора в пространстве по заданным координатам.

Пусть дан вектор $\bar{a}$ (1;2;3). Сначала построим точку А (1;2;3), затем соединим начало координат с точкой А.

Вектор $\overline{OA} = \bar{a}$ (рис.2).

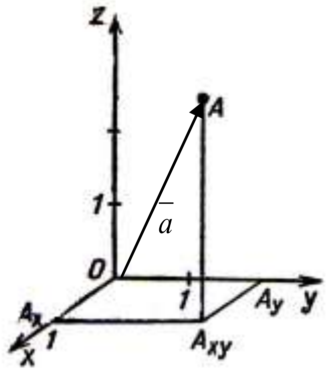


Рис. 2

III. Справочный материал.

a. *Координатами вектора*

с началом в точке A_1 $(x_1; y_1; z_1)$ и концом в точке A_2 $(x_2; y_2; z_2)$ называются числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$.

b. *Разложение вектора пространства по базису:*

Если $B = (\bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$ – базис пространства, то $\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$, где *x*, *y* и *z* – координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $B = (\bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$.

c. *Длина (модуль) вектора* равен корню квадратному из суммы квадратов его координат. Если $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$, то $|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

d. *Условие перпендикулярности векторов:*

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$$

e. *Скалярное произведение векторов* $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$: $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.

Ход работы

1. Изучить теоретическую часть практического занятия.
2. По заданным координатам точек А, В и С построить векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.
3. Вычислить координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.
4. Разложить векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ по базису $B = (\bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$.
5. Построить векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, вычислить их длину.
6. Определить, являются ли векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярными.
7. Сделать вывод.

ЗАДАНИЯ

Вариант 1. A(3;5;3), B(2;–1;4), C(0;–2;1), $\bar{a}$ (2;2;–1), $\bar{b}$ (–1;2;2).

Вариант 2. A(3;–5;2), B(–1;2;4), C(2;0;3), $\bar{a}$ (–1;3;1), $\bar{b}$ (3;2;–3).

Вариант 3. A(2;0;–2), B(–1;2;–2), C(3;4;2), $\bar{a}$ (–4;0;2), $\bar{b}$ (1;3;2).

Вариант 4. A(1;3;2), B(–4;0;2), C(1; 3;1), $\bar{a}$ (0;1;1), $\bar{b}$ (–3; –1;1).

Вариант 5. A(3;0;3), B(–2;1;4), C(–1; 2;1), $\bar{a}$ (–1;1;2), $\bar{b}$ (1; –1;1).

Вариант 6. A(4;–2;–2), B(–2;3;3), C(–4;–3;0), $\bar{a}$ (–1;4;3), $\bar{b}$ (2;2;–2).

Контрольные вопросы:

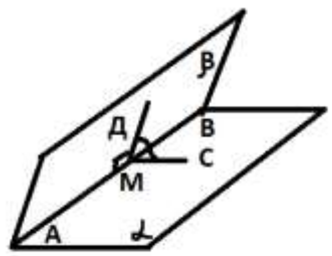
1) Из чего состоит декартова система координат в пространстве?
2) Как определяются координаты точки/вектора в пространстве?
3) Что называется вектором в пространстве?
4) Что такое скалярное произведение двух векторов?
5) Каков геометрический смысл скалярного произ-ведения векторов?

Практическое занятие №10

Тема: Построение двугранного угла.
Цель: Научиться строить линейный угол двугранного угла.

Теория:

Двугранным углом называют угол, образованный пересечением двух непараллельных плоскостей.



Двугранный угол измеряется своим *линейным углом*. Чтобы получить линейный угол, нужно взять точку на ребре и провести к ней два перпендикуляра в каждой гране угла.
CM перпендикулярно AB,
DM перпендикулярно AB,
$\angle$CMD – линейный угол двугранного угла$\angle$ αABβ.

Ход работы

1. Изучить теоретическую часть практического занятия.
2. Построить линейный угол двугранного угла согласно варианту.
3. Сделать вывод.

ЗАДАНИЯ

Вариант 1.

1) Построить линейный угол двугранного угла, образовавшегося прямоугольным треугольником и плоскостью.
2) Построить линейный угол двугранного угла, образовавшегося трапецией и плоскостью.

Вариант 2.

1) Построить линейный угол двугранного угла, образовавшегося равнобедренным треугольником и плоскостью.
2) Построить линейный угол двугранного угла, образовавшегося параллелограммом и плоскостью.

Вариант 3.

1) Построить линейный угол двугранного угла, образовавшегося произвольным треугольником и плоскостью.
2) Построить линейный угол двугранного угла, образовавшегося прямоугольником и плоскостью.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение двугранного угла.
2. Что является мерой двугранного угла?
3. Как построить линейный угол двугранного угла?

Практическое занятие №11

Тема: Построение сечений многогранников
Цель: закрепить умение строить сечения многогранников.

Теория:

Сечением выпуклого многогранника называется выпуклый плоский многоугольник, вершины которого в общем случае являются точками пересечения секущей плоскости с рёбрами многогранника, а стороны – линиями пересечения секущей плоскости с гранями.

Правила построения сечений:

1. Для построения сечения нужно найти прямые, по которым плоскость сечения пересекается с плоскостями граней многогранника.
2. Для построения *прямой пересечения плоскостей* находят две её точки, через них и проводят прямую пересечения.
3. *Точки прямой пересечения плоскостей* отыскиваются как точки пересечения известной прямой, лежащей в одной плоскости, со второй плоскостью.
4. Для построения такой *точки пересечения данных прямой и плоскости* находят прямую, пересекающую данную, – искомая точка получается в пересечении этих прямых (на проекционном чертеже).

Задача 1: В тетраэдре SABC провести сечение плоскостью, проходящей через три точки K, L, M, лежащие соответственно на рёбрах SA, SB и AC (прямые (KL) и (AB) не параллельны).

Дано: SABC – тетраэдр,

$K \in SA$, $L \in SB$, $M \in AC$,

$(KL) \nparallel (AB)$.

Построить: сечение пл. (KLM).

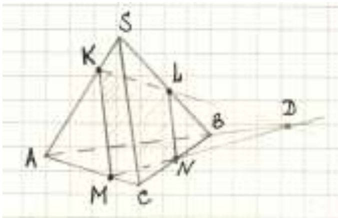


рис.1

Построение:

1. Построим отрезки KL и MN.
2. Прямые (AB) и (KL) лежат в плоскости (ASB), $D = (KL) \cap (AB)$.
3. Прямые (AB) и (MD) лежат в плоскости (ABC), $N = BC \cap (MD)$.
4. Построим отрезок LN.
   MKLN – искомое сечение (рис.1).

Задача 2: На рёбрах параллелепипеда (рис.2) даны три точки A, B и C. Построить сечение параллелепипеда плоскостью (ABC).

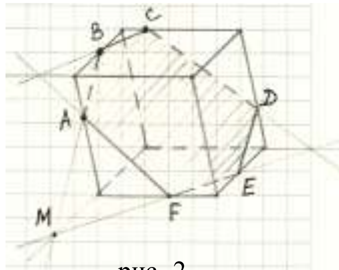


рис. 2

Построение:

Проведем (AB) и продолжим нижнее ребро, лежащее в той же грани, что и (AB), до пересечения с этой прямой в т. M. Соединим точки M и F. (EF) – прямая, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. В правой боковой грани через т. E проведем прямую $(ED) \parallel (AB)$. Соединим точки A и F, C и D. ABCDEF – искомое сечение.

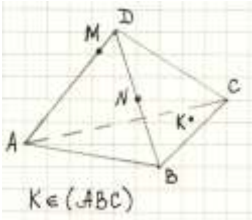
Ход работы

8. Изучить теоретическую часть практического занятия.
9. Выполнить задания своего варианта (см. раздаточный материал).
10. Сделать вывод.

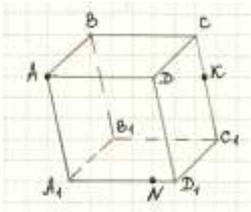
ЗАДАНИЯ

<u>Вариант 1.</u>

№1.



№2.

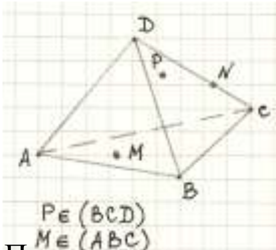


Построить сечение плоскостью (MNK).

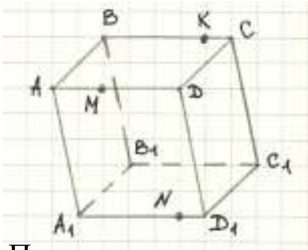
Построить сечение плоскостью (ANK).

<u>Вариант 2.</u>

№1.



№2.

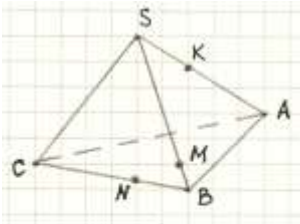


Построить сечение плоскостью (MNP).

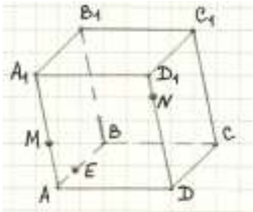
Построить сечение плоскостью (KMN).

<u>Вариант 3.</u>

№1.



№2.



Построить сечение плоскостью (KMN).

Построить сечение плоскостью (EMN).

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение сечения многогранника.
2. Сколько сторон может быть в сечении тетраэдра? прямого параллелепипеда? прямой шестиугольной призмы? Ответы обоснуйте.

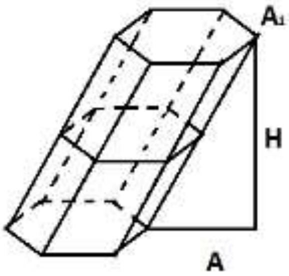
Практическое занятие №12

Тема: Вычисление площадей поверхностей и объёмов тел
Цель: закрепить навыки в нахождении площади поверхностей и объёмов многогранников и тел вращения

Теория: *Формулы для нахождения площадей поверхности и объемов:*

<table>
<tr><th>Многогранники</th><th>Тела вращения</th></tr>
<tr><td>

Призма



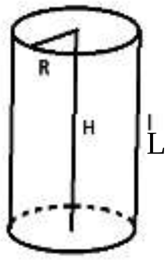
$S_{бок}=P_{\perp сеч}\cdot AA_1$

$S_{полн}=2S_{осн}+S_{бок}$

$V=S_{осн}\cdot H$

</td><td>

Цилиндр



$S_{осн}=\pi R^2$

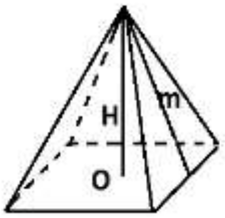
$S_{бок}=2\pi RH$

$S_{полн}=2\pi R^2+2\pi RH$

$V=\pi R^2 H$

</td></tr>
<tr><td>

Пирамида



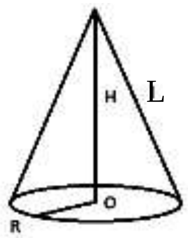
$S_{бок.\ прав}=\frac{1}{2}P_{осн}\cdot m$

$S_{полн}=S_{осн}+S_{бок}$

$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$

</td><td>

Конус



$S_{бок}=\pi R^2$

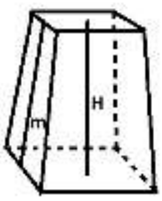
$S_{бок}=\pi RL$

$S_{полн}=\pi R^2+\pi RL$

$V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H$

</td></tr>
<tr><td>

Усеченная пирамида



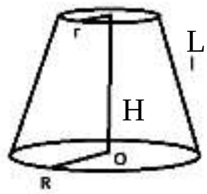
$S_{бок.\ прав}=\frac{1}{2}(P_{осн.в}+P_{осн.н})\cdot m$

$S_{полн}=S_{осн.в}+S_{осн.н}+S_{бок}$

$V=\frac{H}{3}\cdot(S_{осн.в}+\sqrt{S_{осн.в}\cdot S_{осн.н}}+S_{осн.н})$

</td><td>

Усеченный конус



$S_{н.осн}=\pi R^2$

$S_{в.осн}=\pi r^2$

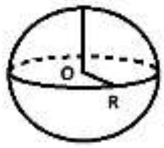
$S_{бок}=\pi(R+r)\cdot L$

$S_{полн}=\pi R^2+\pi r^2+\pi(R+r)\cdot L$

$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$

</td></tr>
<tr><td></td><td>

Шар



$S_{пов}=4\pi R^2$

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

</td></tr>
</table>

Ход работы

1. Изучить теоретическую часть практического занятия.
2. Выполнив необходимые измерения, вычислить площадь полной поверхности многогранника и тела вращения.
3. Сделать вывод.

Контрольные вопросы

1. Дать определение многогранников: призмы, пирамиды, усеченной пирамиды.
2. Дать определение тел вращения: цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара.
3. Знать формулы для вычисления площади поверхности и объема тел.

ЛИТЕРАТУРА

1 . Богомолов, Н. В. Алгебра и начала анализа: учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. - М.: Издательство Юрайт, 2017

.2 Богомолов, Н. В. Геометрия: учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. — М.: Издательство Юрайт, 2017