

Калужский филиал ПГУПС

Методическая разработка открытого урока на  
тему:

Применение определенного интеграла к  
решению физических задач.

Преподаватель

Мифтахова Ф.А.

**ИНТЕГРИРОВАННЫЙ**

**УРОК**

**ПО ФИЗИКЕ И МАТЕМАТИКЕ**

**Применение  
определенного  
интеграла к решению  
физических задач**

**Слеп физик без  
математики.**



**М.В.ЛОМОНОСОВ**

# Цели урока:

- закрепить, повторить и обобщить знания, полученные при изучении темы: «Интеграл»
- закрепить практические навыки вычисления определенного интеграла
- рассмотреть практическое применение данной темы в физике

# Найдите первообразные для функций:



1.  $f(x)=10x$

2.  $f(x)=x^2$

3.  $f(x)=5 \cos x$

4.  $f(x)=6x^2$

5.  $f(x)=3$

6.  $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

7.  $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

# Составьте пару:

**Объяснение задания:** В клетках таблицы записать функции. Для каждой функции найдите первообразную и запишите соответствие клеток. **Например:** ответ 1-9 и т.д.

<u>1.</u> $x$	<u>5.</u> $a^x$	<u>9.</u> $\frac{x^2}{2}$	<u>13.</u> $\frac{x^{n+1}}{n+1}$
<u>2.</u> $\frac{1}{x}$	<u>6.</u> $\frac{1}{\sin^2 x}$	<u>10.</u> $\sin x$	<u>14.</u> $e^x$
<u>3.</u> $\frac{a^x}{\ln a}$	<u>7.</u> $\ln x$	<u>11.</u> $-\text{ctg } x$	<u>15.</u> $\sin x$
<u>4.</u> $\cos x$	<u>8.</u> $x^n$	<u>12.</u> $e^x$	<u>16.</u> $-\cos x$

# НАЙДИТЕ ОШИБКУ:

$$1. \int x^5 dx = 5x^4 + C$$

$$2. \int x^6 dx = \frac{1}{7}x^7 + C$$

$$3. \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

$$4. \int_0^2 x^2 dx = \frac{2x^3}{3}$$

$$5. \int_0^1 5 dx = 5$$

**1 вариант**

$$1) \int \frac{1}{4} dx$$

$$2) \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$3) \int_0^5 x^2 dx$$

$$4) \int_{-1}^1 (x + 3)^2 dx$$

$$5) \int_{-1}^1 \frac{2}{x^3} dx$$

**2 вариант**

$$1) \int 2 \sin x dx$$

$$2) \int 3 \sqrt[5]{x^2} dx$$

$$3) \int_0^1 x dx$$

$$4) \int_{-1}^1 (1 - 2x)^3 dx$$

$$5) \int_{-2}^0 \frac{1}{x^5} dx$$

**3 вариант**

$$1) \int \cos 5x dx$$

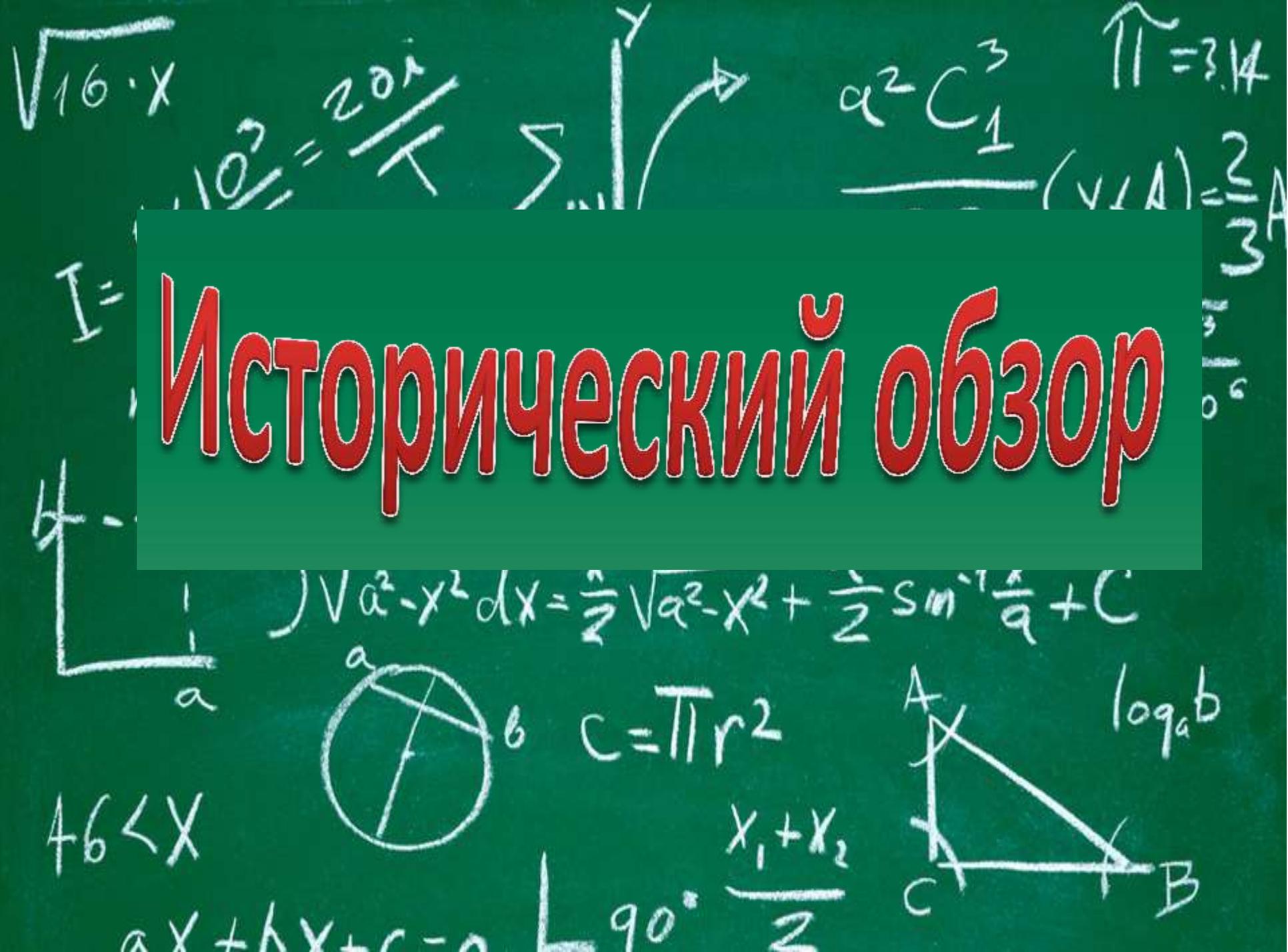
$$2) \int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} dx$$

$$3) \int_1^4 \sqrt{x} dx$$

$$4) \int_0^3 5 dx$$

$$5) \int_1^2 \frac{4}{x^7} dx$$

# Исторический обзор



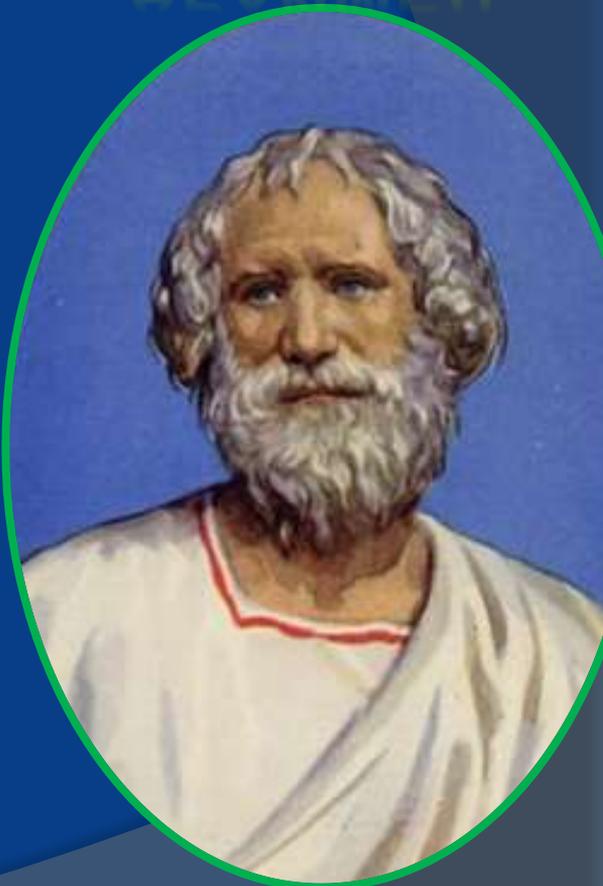
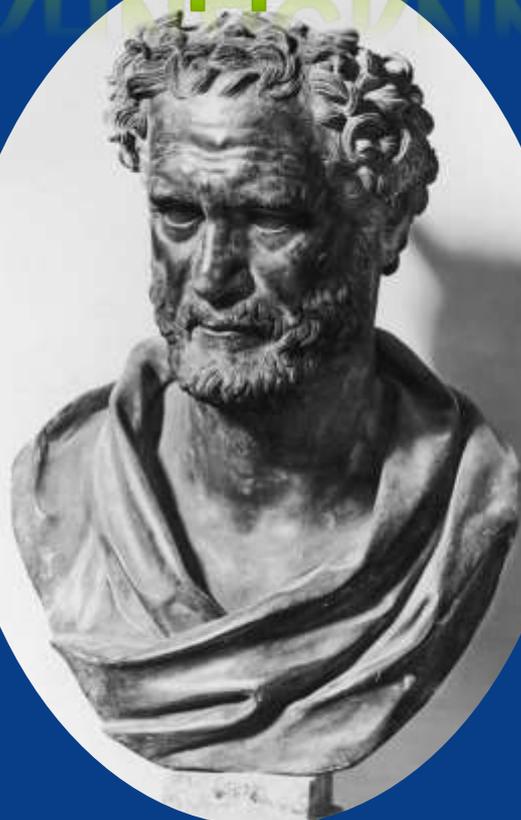
# АНТИЧНОСТЬ:

V-? S-?

ЕВДОКС  
ДЕМОКРИТ  
КНИДСКИЙ

ЕВДОКС  
КНИДСКИЙ

АРХИМЕД

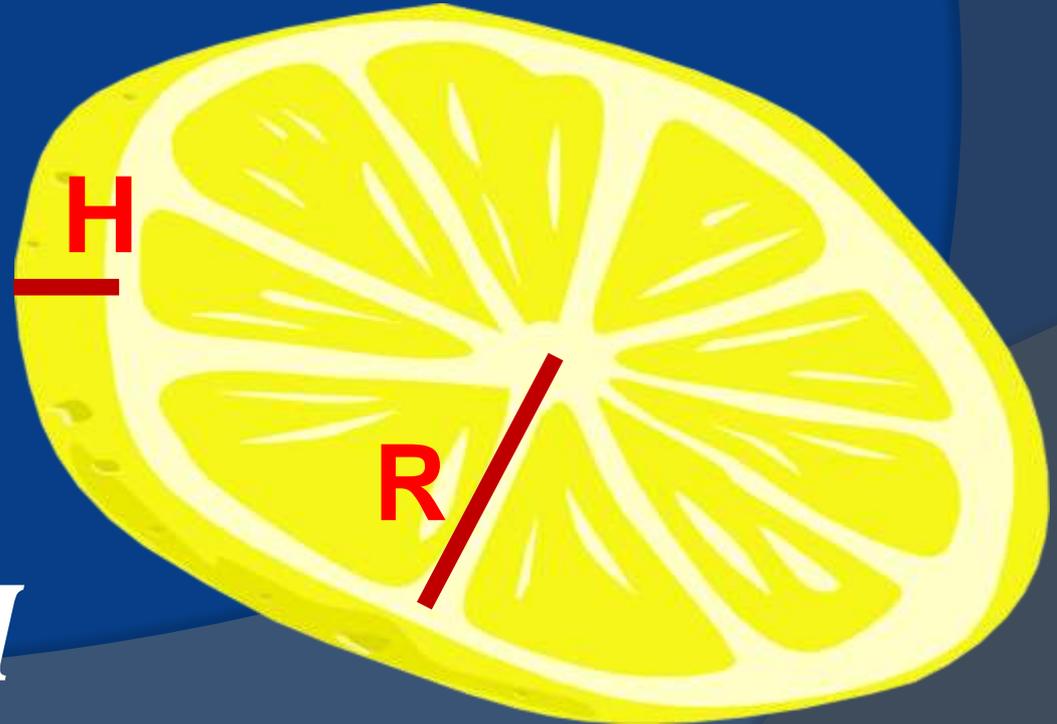


5 ВЕК ДО Н.Э

4 ВЕК ДО Н.Э

3 ВЕК ДО Н.Э

# МЕТОД ИСЧЕРПЫВАНИЯ



$$V = \pi R^2 * H$$

# СРЕДНИЕ ВЕКА

Ученые Среднего и Ближнего Востока изучали и переводили труды Архимеда на общедоступный в их среде арабский язык, но существенно новых результатов в интегральном исчислении они не получили.

Деятельность европейских ученых в это время была еще более скромной.

Труды Архимеда, впервые изданные в 1544г. (на латинском и греческом языках), стали привлекать широкое внимание, и их изучение явилось одним из важнейших отправных пунктов развития интегрального исчисления.



# 17 ВЕК

Эдмунд Хук



1687 = 1687

# Интегральное исчисление независимо друг от друга создали

И. Ньютон



1642г – 1726г

**Интеграл** - разность соответствующих значений преобразной функции

$$\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b)$$

создали

Г. Лейбниц



1646г – 1716г

**Интеграл** - сумма всех бесконечно малых дифференциалов

$$\int_b^a f(x) dx = \sum f(x_i) dx_i$$

# 18 ВЕК

И. Бернулли



(1655г - 1705г)

Л. Эйлер



(1707г – 1783г)

Ж. Лагранж



(1736г – 1813г)

Символ



введен Лейбницем

(1675г.).



$\int$   
Summa

Современная терминология было создана  
только в конце 18 века

Термин **«интеграл»**  
впервые в печати  
употребил Я. Бернулли  
в 1690г, после чего в  
обиход вошло  
**«интегральное  
исчисление»**



# 19 ВЕК

О. Коши



(1789г – 1857г)

Б. Риман



(1826г – 1866г)

# 19 ВЕК

## РУССКИЕ УЧЕНЫЕ

М.В. Остроградский



1801г – 1861г

В.Я. Буняковский



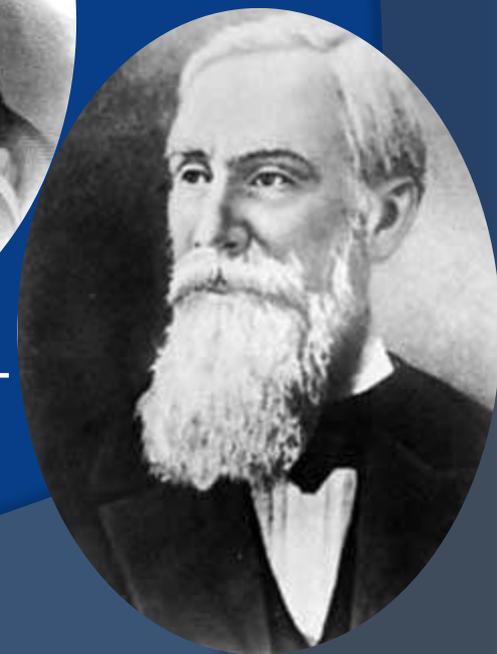
1804г – 1889г

Н.И. Лобачевский



1729г – 1856г

П.Л. Чебышев



1821г – 1894г

# 20 ВЕК

Различные обобщения понятия интеграла уже в начале 20 столетия предложили математики:

А. Данжуа



(1884г – 1974г)

А.Я. Хинчин



(1894г - 1959г)

А. Лебег



(1875г – 1941г)

**ИНТЕГРАЛ** - «ОТ ЛАТИНСКОГО INTEGER – ЦЕЛЫЙ» ЦЕЛАЯ ВЕЛИЧИНА РАССМАТРИВАЕМАЯ КАК СУММА СВОИХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ЧАСТЕЙ.

**ИНТЕГРАЦИЯ** - «ОТ ЛАТИНСКОГО INTEGRATIO – ВОССТАНОВЛЕНИЕ, ВОСПОЛНЕНИЕ» ОБЪЕДИНЕНИЕ В ЦЕЛОЕ КАКИХ-ЛИБО ЧАСТЕЙ, ЭЛЕМЕНТОВ.

**Определение 1.** Приращение  $F(b)-F(a)$  любой из первообразных функций  $F(x)+c$  при изменении аргумента от  $x=a$  до  $x=b$  называют определённым интегралом от  $a$  до  $b$  функции  $f$  и обозначается ,

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$$

**Определение 2.** Определенный интеграл есть предел интегральной суммы, число членов которой неограниченно возрастает, а каждое слагаемое стремится к нулю.

$$\int_b^a f(x)dx = \sum f(x_i)dx_i$$

Что значит  
по-гречески слово

«PHYSIS» ?  
Природа

Earth

# $M$ Что такое модель?

- упрощенная версия

физической системы или

процессов, сохраняющая

главные черты.



**Что такое физическая величина?**

**- измеряемая**

**характеристика**

**физических объектов или**

**явлений.**



**Что такое физические законы?**

**- устойчивые,  
повторяющиеся  
объективные  
закономерности  
существующие в природе.**

Законы физики-  
сформулированные словесно или  
в математической форме  
утверждения, которые  
характеризуют объективно  
существующие связи между  
предметами и явлениями  
природы.

# Физические законы

-ЭТО математическое

описание природы.



# **Николай Иванович Лобачевский**



*Н. И. Лобачевский*

**«Математика –  
это язык, на  
котором  
говорят все  
точные науки»**

***Математику  
уже затем учить надо,  
что она ум  
в порядок приводит.***

**(М.В. Ломоносов)**

# Механическая работа

$$A = FScos \alpha$$

**A**- работа [Дж]

**F**- сила [Н]

**S**- перемещение [м]

# СКОРОСТЬ

$$v = \frac{s}{t}$$

$v$ -СКОРОСТЬ [м/с]

$s$ - ПУТЬ [м]

$t$ - ВРЕМЯ [с]

# Закон Гука

$$F = -kx$$

**F** - сила упругости

[Н]

**k** - коэффициент жесткости

[Н/м]

**x** - смещение

[м]

# Сила тяжести

$$F = mg$$

**F** - сила тяжести [Н.]

**m** - масса [кг.]

**g** - ускорение свободного  
падения [м/с<sup>2</sup>]

# Масса тела

$$m = gV$$

**m**- масса

[кг]

**g**- ускорение свободного  
падения

[м/с<sup>2</sup>]

**V**- объем

[м<sup>3</sup>]

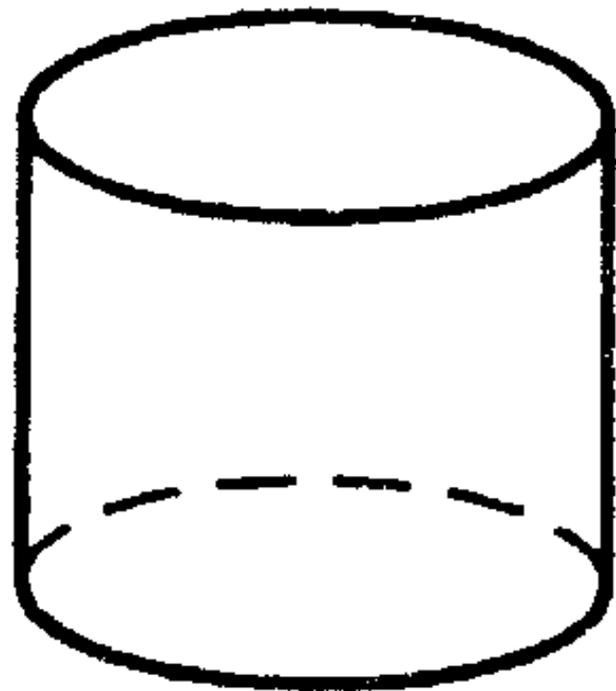
# Объем цилиндра

$$V = SH$$

**V** - объем [м<sup>3</sup>]

**S** - площадь [м<sup>2</sup>]

**H** - высота [м]

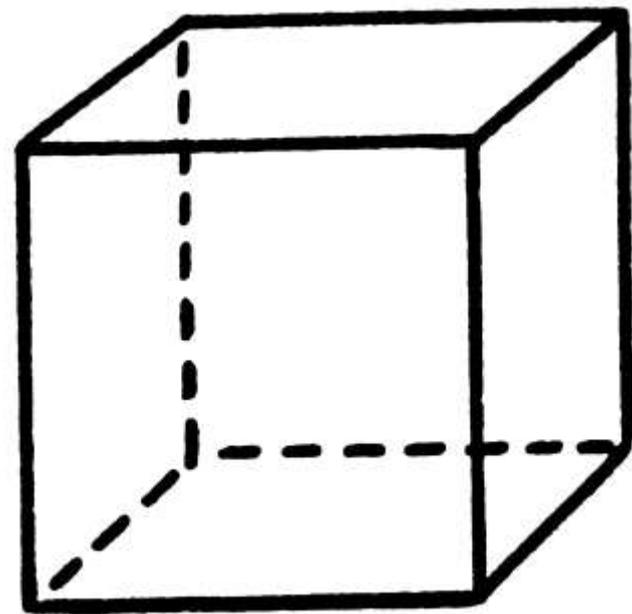


# Объем куба

$$V = a^3$$

$V$  - объем  $[m^3]$

$a$  - длина стороны  $[m]$



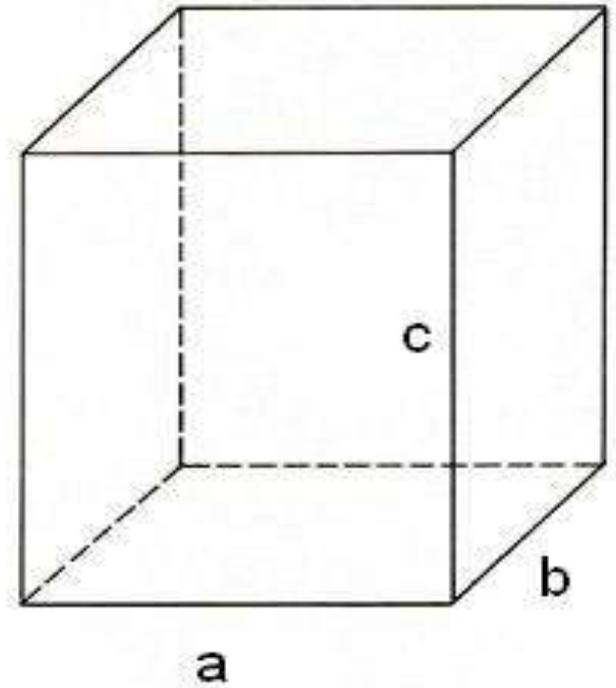
# Объем параллелепипеда

$$V = abc$$

**a**-длина [м]

**b**-ширина [м]

**c**-высота [м]



# Нахождение пути, пройденного телом при прямолинейном движении.

$V = \text{const}$  (равномерное движение)  $\longrightarrow$   $S = Vt$

$V = f(t)$  (неравномерное движение)

$$dS = V(t)dt \longrightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt$$

«Путь, пройденный телом равен интегралу от скорости, взятому по времени»

Тело брошено с поверхности Земли вертикально  
вверх со скоростью  $V=29,4-9,8t$  м/с.

Найти наибольшую высоту подъема тела.

$$V=29,4-9,8t$$

$$t_1=0$$

$$V(t_2)=0$$

$S=?$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt$$

1.  $t_2=?$

$$29,4-9,8t_2=0$$

$$t_2=3$$

2. 
$$S = \int_0^3 (29,4 - 9,8t) dt =$$
  
$$= 9,8 \left( 3t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^3 = 44,1 \text{ м.}$$

Ответ: 44,1 м.

Скорость движения тела задана уравнением

$$V=18t-3t^2 \text{ м/с.}$$

Найти путь, пройденный телом от начала движения до его остановки.

$$V=18t-3t^2$$

$$t_1=0$$

$$V(t_2)=0$$

$$S=?$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt$$

1.  $t_2 - ?$

$$18t_2 - 3t_2^2 = 0$$

$$6t_2 - t_2^2 = 0$$

$$t_2(6 - t_2) = 0$$

$$t_2 = 0 \quad t_2 = 6$$

$$2. S = \int_0^6 (18t - 6t^2) dt = \left( \frac{18t^2}{2} - \frac{3t^3}{3} \right) \Bigg|_0^6 = (9t^2 - t^3) \Bigg|_0^6 =$$

$$= 9 \cdot 6^2 - 6^3 = 6^2(9 - 6) = 36 \cdot 3 = 108 \text{ м.}$$

Ответ : 108 м.

# Работа переменной силы

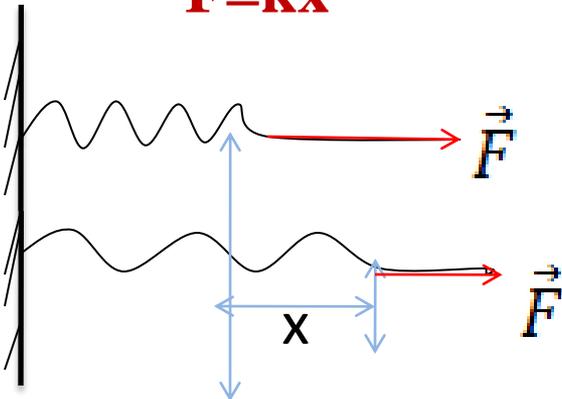
$$F = \text{const} \quad A = FS \cos \alpha, \quad \alpha = 0^\circ \longrightarrow A = FS$$

$$F = F(x) \quad dA = F(x) dx \longrightarrow A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

«Работа, произведенная силой, равна интегралу от силы взятому по пути»

Вычисление работы  
затраченной на упругое  
растяжение (сжатие)

$$\mathbf{F} = k\mathbf{x} \quad \text{Закон Гука}$$



$$dA = kx dx$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} dA = k \int_{x_1}^{x_2} x dx$$

Силой в **80 Н** пружина растягивается на **0,02м**.

Первоначальная длина пружины **0,15м**. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть ее до **0,2м**?

$$F=80\text{Н}$$

$$L_0=0,15\text{м.}$$

$$x_1=0,02$$

$$L=0,2$$

A-?

$$A = \int_{x_1}^{x_2} kx dx$$

$$1. F=kx_1 \iff k = \frac{F}{x_1} = \frac{80}{0,02} = 4000 \text{ Н/м}$$

2. Пружину требуется растянуть на

$$L-L_0=0,2-0,15=0,05 \text{ м.}$$

$$A = \int_0^{0,05} 4000x dx = 4000 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,05} =$$

$$=2000*0,0025= 5 \text{ Дж.}$$

Ответ : 5 Дж.

Сила в **60 Н** растягивает пружину на **2 см**. Первоначально длина пружины равна **14 см**. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть ее до **20 см**?

$$F=60 \text{ Н}$$

$$x_1=0,02 \text{ м}$$

$$L=0,2 \text{ м}$$

$$L_0=0,14 \text{ м}$$

A-?

$$A = \int_{x_1}^{x_2} kx dx$$

$$1. F=kx_1 \implies k = \frac{F}{x_1} = \frac{60}{0,02} = 3000 \text{ Н/м}$$

2. Пружину требуется растянуть на

$$L-L_0=0,2-0,14=0,06 \text{ м.}$$

$$A = \int_0^{0,06} 3000x dx = 1500x^2 \Big|_0^{0,06}$$

$$1500 \cdot 0,06^2 = 5,4 \text{ Дж.}$$

Ответ : 5,4 Дж.

# Работа переменной силы

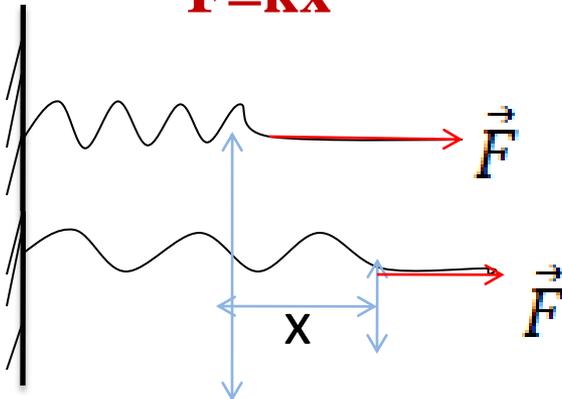
$$F = \text{const} \quad A = FS \cos \alpha, \quad \alpha = 0^\circ \longrightarrow A = FS$$

$$F = f(x) \quad dA = f(x) dx \longrightarrow A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

«Работа, произведенная силой, равна интегралу от силы взятому по пути»

Вычисление работы  
затраченной на упругое  
растяжение (сжатие)

$$F = kx \quad \text{Закон Гука}$$



$$dA = kx dx$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} dA = k \int_{x_1}^{x_2} x dx$$

Вычисление работы, производимой  
при поднятии груза

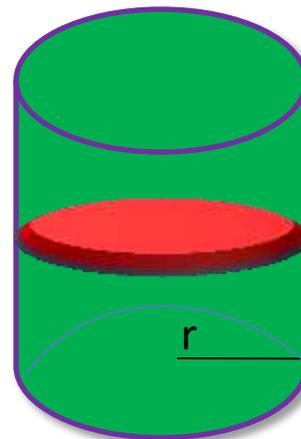
$$A = mgH, \\ m = \rho V$$

$$dA = \rho dV gx$$

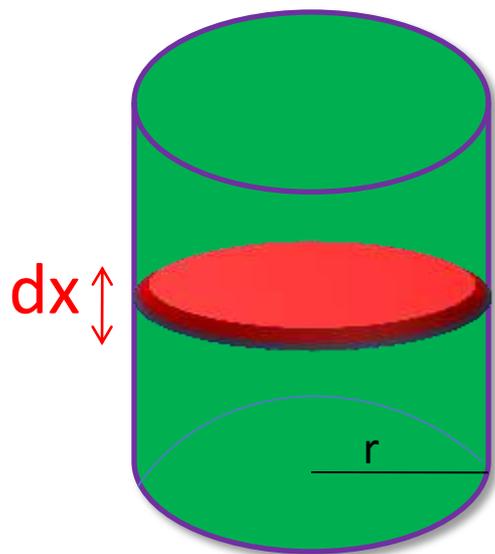
$$A = \int_0^H dA = \int_0^H \rho g x dV$$

$$dV = S dx, \quad S = \Pi r^2$$

$$A = \int_0^H \rho g \Pi r^2 x dx$$



Цилиндрический резервуар с радиусом основания **2 м** и высотой **3 м** заполнен водой. Вычислить работу, которую необходимо совершить, чтобы выкачать воду из резервуара



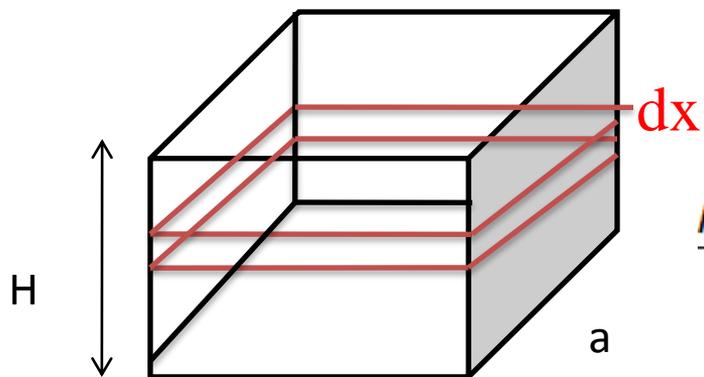
$$\begin{array}{l}
 r=2\text{м} \\
 H=3\text{м} \\
 g=10 \text{ м/с}^2 \\
 \rho= 10^3 \text{ кг/м}^3
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 dA=\rho dV g x \\
 dV=S dx, S=\Pi r^2 \\
 A = \int_0^H dA = \int_0^H \rho g x \Pi r^2 dx \\
 A=?
 \end{array} \right.$$

$$\frac{\rho g \Pi r^2 x^2}{2} \Big|_0^H = \frac{\rho g \Pi r^2 H^2}{2} = \frac{10 * 10^3 * 3,14 * 2^2 * 3^2}{2}$$

$$= 565,2 \text{ кДж}$$

Ответ: 565,2 кДж

Прямоугольный резервуар, основанием которого служит квадрат со стороной **3 м** и высотой равной **2 м**, заполнен водой. Вычислите работу, которую необходимо совершить, чтобы выкачать воду из резервуара.



$$a=3 \text{ м}$$

$$H=2 \text{ м}$$

$$g=10 \text{ м/с}^2$$

$$\rho=10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$dA=\rho dV g x$$

$$dV=a^2 dx$$

$$A = \int_0^H dA = \int_0^H \rho a^2 g x dx =$$

$$\frac{\rho a^2 g x^2}{2} \Big|_0^H = \frac{\rho a^2 g H^2}{2} = \frac{10^3 * 3^2 * 10 * 2^2}{2}$$

$$=180 \text{ кДж.}$$

Ответ: 180 кДж.

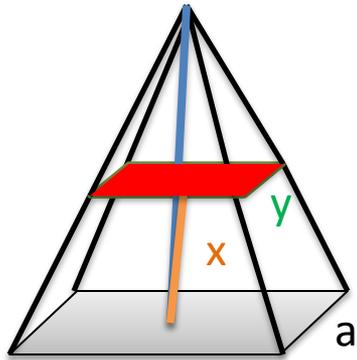
# Пирамида Хеопса



Пирамида Хеопса представляет собой правильную четырехугольную пирамиду высотой **147 м**, в основании которой квадрат со стороной **232 м**. Она построена из камня, плотность которого  **$2,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>**.

Найти работу против силы тяжести, затраченную при постройке.

# Пирамида Хеопса



1. Найдем сторону  $y$  квадрат, получающегося в горизонтальном сечении пирамиды на высоте  $x$

2. Из подобия треугольников:  $\frac{H-x}{H} = \frac{y}{a} \longrightarrow$

$$y = \frac{a}{H} (H-x)$$

3. Рассмотрим тонкий слой пирамиды, толщиной  $dx$  (параллелепипед)

$$dV = y^2 dx$$

4. При подъеме этого слоя была проделана работа

$$dA = \rho dV gx$$

$$dA = g\rho \frac{a^2}{H^2} x (H-x)^2 dx$$

$$\rho = 2,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$H = 147 \text{ м.}$$

$$a = 232 \text{ м.}$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2$$

A-?

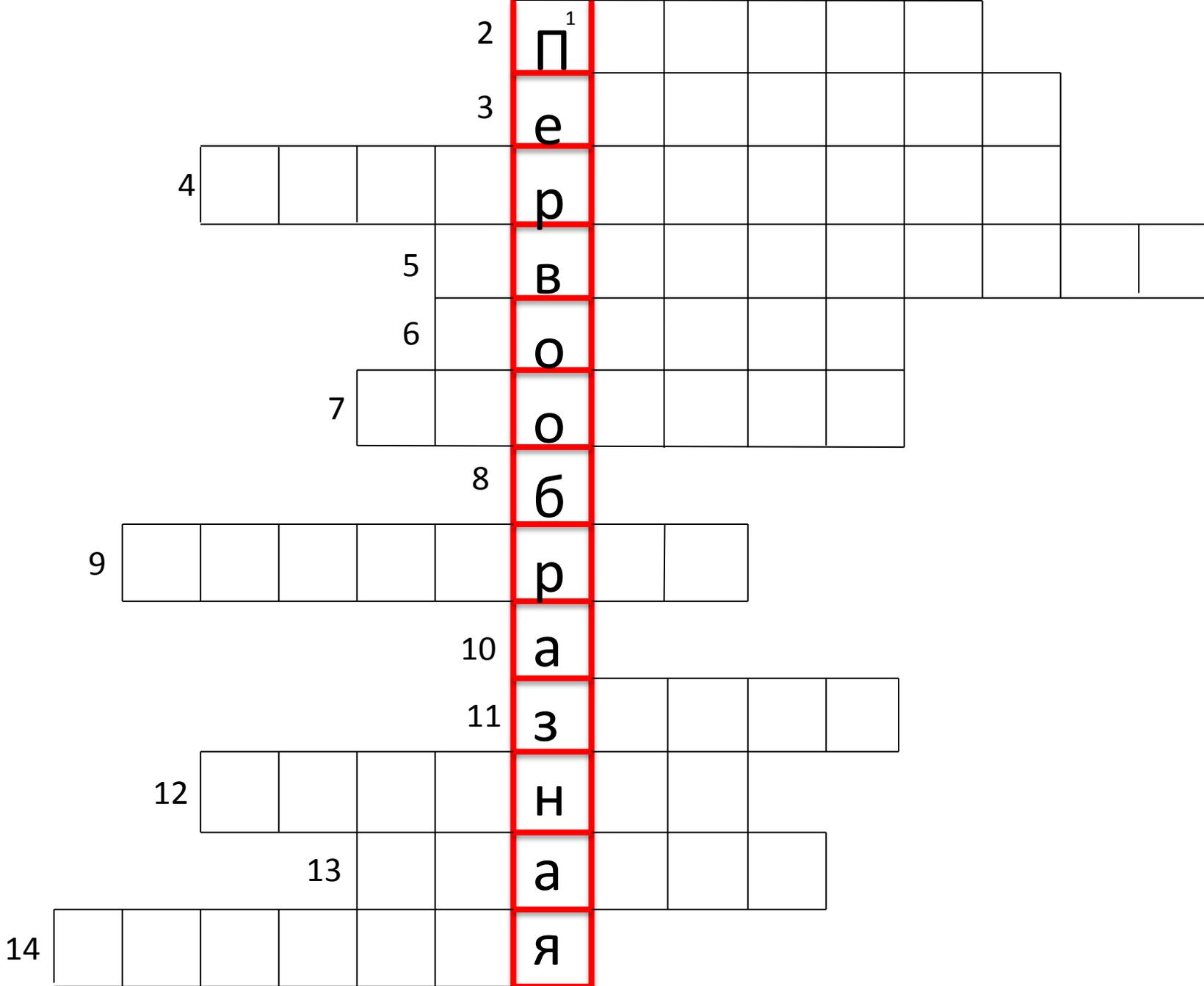
$$\begin{aligned}
A = A(H) &= \int_0^H dA = g\rho \frac{a^2}{H^2} \int_0^H x (H - x)^2 dx \\
&= \frac{g\rho a^2}{H^2} \int_0^H (H^2 x - 2Hx^2 + x^3) dx \\
&= \frac{g\rho a^2}{H^2} \left( H^2 \frac{x^2}{2} - 2H \left( \frac{x^3}{3} \right) + \frac{x^4}{4} \right) \\
&= \frac{g\rho a^2}{H^2} \left( \frac{H^4}{2} - \frac{2H^4}{3} + \frac{H^4}{4} \right) = \frac{g\rho a^2}{12} * H^2
\end{aligned}$$

$a=232$  м,  $H=147$  м,  $\rho=2,5$  г/см<sup>3</sup>=2,5 т/м<sup>3</sup>, получаем  
 $A=2,37*10^{12}$  Дж=2,4\*10<sup>5</sup> тонно-километров

# Рефлексия

Заполнить таблицу рефлексии. Подчеркните, пожалуйста, те состояния, которые вы испытали на уроке

Интерес	
Беспокойство	
Эмоциональный подъем	
Удовольствие	
Раздражение	



# Домашнее задание

Учебник А.А.Дадаян

стр. 358 № 10.87

Стр. 359 Ответить на вопросы