

# Калужский филиал ПГУПС

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
**по выполнению практических занятий**  
**по учебной дисциплине**

*Техническая*  
*механика*

программы подготовки специалистов среднего звена  
по специальности СПО

*08.02.10. «Строительство железных дорог, путь и*  
*путевое хозяйство»*

Базовая подготовка

Тема: «Кручение круглого прямого бруса»

( построение эпюр)

Составил: преподаватель Степанян М.Г.

2017 г

## КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

**Кручение** – вид сопротивления, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент  $T$ . Остальные силовые факторы ( $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) отсутствуют.

**Вал** – брус, работающий на кручение.

Принято внешние силовые факторы называть *вращающими* или *скручивающими* моментами и обозначать  $M$ ; внутренние усилия – *крутящим* моментом  $T$  (от англ. *torsion, torque*)

В расчетах на прочность и жесткость при кручении знак крутящего момента значения не имеет, но для удобства построения эпюр принято правило:

*Крутящий момент считают положительным, если при взгляде в торец отсеченной части бруса он стремится вращать сечение против хода часовой стрелки.*

*Положительный крутящий момент вызывает положительные касательные напряжения*

### . ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

На основании метода сечений крутящий момент в произвольном поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения.

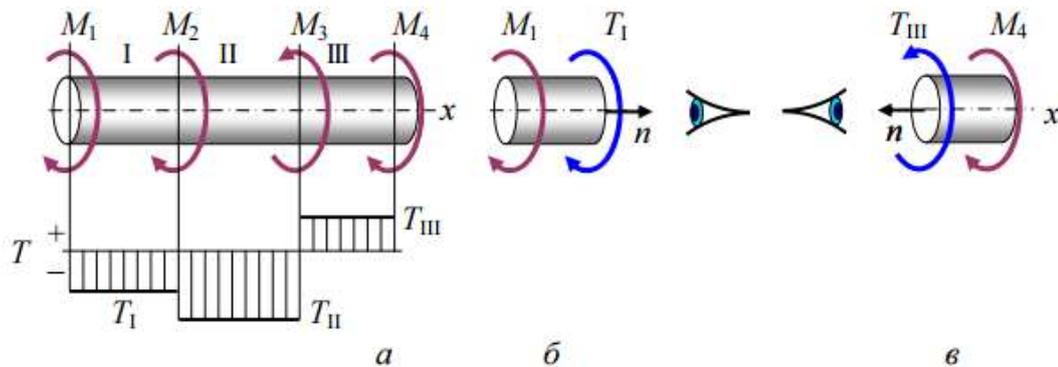


Схема нагружения вала и эпюра крутящих моментов (а); определение внутреннего усилия на участке I (б); то же на участке III (в)

$$\text{б: } \sum M_x = 0; \quad T_1 + M_1 = 0; \quad T_1 = -M_1.$$

$$\text{в: } \sum M_x = 0; \quad T_{III} - M_4 = 0; \quad T_{III} = M_4.$$

**Эпюра крутящих моментов** – график изменения крутящих моментов по длине бруса.

Во всех случаях эпюры внутренних усилий строят на осевой линии бруса. Величину силового фактора откладывают по нормали к оси.

## НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

Теория брусев, имеющих круглое сплошное или кольцевое поперечное сечение, основана на следующих положениях.

Поперечные сечения бруса плоские до деформации остаются плоскими и в деформированном состоянии – гипотеза твердых дисков (Бернулли).

Радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину. Поперечные сечения остаются круглыми.

Расстояния между поперечными сечениями вдоль оси бруса не изменяются.

## РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \leq [\tau],$$

где  $W_p$  – полярный момент сопротивления поперечного сечения.

Для круглого сечения  $I_p = \frac{\pi D^4}{32}, \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16}.$

Для кольцевого сечения  $I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - c^4), \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - c^4),$

где  $c = \frac{d}{D}$  – коэффициент пустотелости.

Если сечение некруглое (прямоугольное, треугольное, эллиптическое...), используют  $I_k, W_k$ , которые вычисляют по специальным формулам.

Допускаемое напряжение при кручении  $[\tau] = (0,5-0,6)[\sigma].$

Виды расчетов на прочность:

а) поверочный – вычисляют  $\tau_{\max}$  и сравнивают его с  $[\tau]$ , определяя недогрузку или перегрузку в процентах, либо находят коэффициент запаса прочности и сравнивают его с нормативными значениями;

б) проектный – вычисляют диаметр вала  $D$  при известных значениях  $T$  и  $[\tau]$ ;

в) определяют допускаемый крутящий момент при известных диаметре вала  $D$  и допуском касательном напряжении  $[\tau]$ .

## ДЕФОРМАЦИЯ ВАЛА ПРИ КРУЧЕНИИ

Для вала *постоянной* жесткости сечения (произведение  $G \cdot I_p$ ) на длине  $\ell$  и *постоянного* крутящего момента  $T$  угол закручивания вала

$$\varphi = \frac{T \cdot \ell}{G \cdot I_p}.$$

Полученную зависимость называют **законом Гука при кручении**.

Произведение  $G I_p$  называют **жесткостью сечения при кручении**.

### РАСЧЕТ ВАЛОВ НА ЖЕСТКОСТЬ

За меру жесткости принимают относительный угол закручивания, то есть угол, приходящийся на единицу длины вала

$$\theta = \frac{\varphi}{\ell} = \frac{T}{G \cdot I_p}.$$

$$\text{Условие жесткости: } \theta = \frac{T}{G \cdot I_p} \leq [\theta],$$

где  $[\theta]$  имеет размерность рад/м. Чаще пользуются условием

$$\theta = \frac{T}{G \cdot I_p} \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta^\circ].$$

Допускаемое значение угла  $[\theta^\circ]$  закручивания зависит от назначения вала. Принимают  $[\theta^\circ] = (0,3-1,0)$  град/м.

При расчете валов на прочность и жесткость часто задают мощность  $N$ , передаваемую валом и частоту его вращения  $n$ . Для вычисления крутящего момента по этим данным удобно воспользоваться таблицей

$M = \frac{N}{\omega}$		$\frac{\text{Вт}}{\text{с}^{-1}} = \text{Н} \cdot \text{м}$
$M = \frac{N \cdot 30}{n \cdot \pi}$	$= 9549 \frac{N}{n}$	$\frac{\text{кВт}}{\text{об/мин}} = \text{Н} \cdot \text{м}$
$M = \frac{N \cdot 30}{n \cdot \pi \cdot 9,807}$	$= 973,8 \frac{N}{n}$	$\frac{\text{кВт}}{\text{об/мин}} = \text{кГ} \cdot \text{м}$
$M = \frac{N \cdot 30 \cdot 0,736}{n \cdot \pi}$	$= 7028 \frac{N}{n}$	$\frac{\text{л.с.}}{\text{об/мин}} = \text{Н} \cdot \text{м}$
$M = \frac{N \cdot 30 \cdot 0,736}{n \cdot \pi \cdot 9,807}$	$= 71620 \frac{N}{n}$	$\frac{\text{л.с.}}{\text{об/мин}} = \text{кГ} \cdot \text{см}$

## Расчета вала на прочность и жесткость

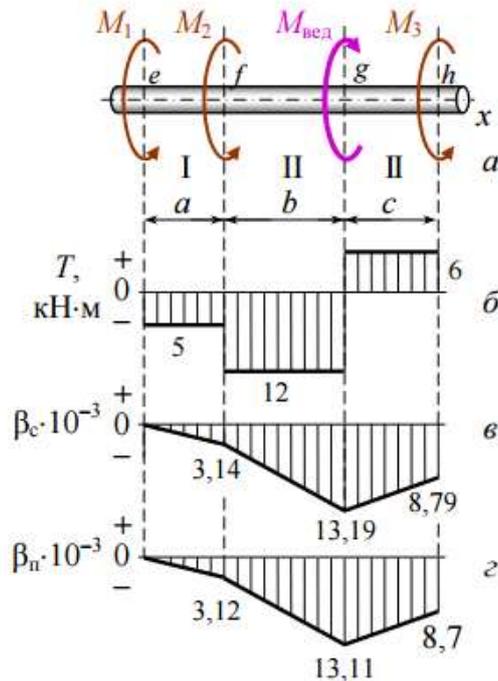


Схема нагружения вала (а), эпюра крутящих моментов (б), эпюры углов закручивания сплошного (в) и полого (z) валов

Для расчетов на прочность и жесткость необходимо найти положение опасных сечений и величины крутящих моментов, действующих в этих сечениях вала (рис. а). Воспользовавшись методом сечений определим внутренние усилия и построим эпюру крутящих моментов (рис. б). Опасными являются все сечения на участке II, где действует  $T_{\max} = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

### II. Проектный расчет валов сплошного и полого сечений

Предварительно найдем допускаемое касательное напряжение, связанное с допускаемым нормальным напряжением. Принимаем по третьей теории прочности

$$[\tau] = 0,5 [\sigma] = 0,5 \cdot 160 = 80 \text{ МПа.}$$

Из условия прочности и жесткости при кручении находим требуемые значения полярных момента сопротивления и момента инерции

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau] \Rightarrow W_p \geq \frac{T_{\max}}{[\tau]} = \frac{12000}{80 \cdot 10^6} = 0,00015 \text{ м}^3 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

$$\theta = \frac{T}{G \cdot I_p} \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta] \Rightarrow I_p \geq \frac{T}{G \cdot [\theta]} \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{12000 \cdot 180}{80 \cdot 10^9 \cdot 0,8 \cdot \pi} = 1,074 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Из условия прочности и жесткости выполнить проектный расчет: определить диаметры валов в двух вариантах исполнения – сплошного и полого с коэффициентом пустотелости  $c = d/D = 0,8$ . Результаты округлить согласно ГОСТу. Построить эпюры углов закручивания вала. Валы сопоставить по металлоемкости и жесткости.

Дано:

$$\begin{aligned} M_1 &= 5 \text{ кН}\cdot\text{м}; & a &= 0,6 \text{ м}; \\ M_2 &= 7 \text{ кН}\cdot\text{м}; & b &= 0,8 \text{ м}; \\ M_3 &= 6 \text{ кН}\cdot\text{м}; & c &= 0,7 \text{ м}; \\ [\sigma] &= 160 \text{ МПа}; & [\theta] &= 0,8 \text{ град/м}. \end{aligned}$$

### I. Определение внутренних усилий

Значение ведущего момента  $M_{\text{вед}}$  определим из условия равновесия вала:  $\sum M_x = 0$ ;  
 $M_{\text{вед}} - M_1 - M_2 - M_3 = 0$ , откуда  
 $M_{\text{вед}} = M_1 + M_2 + M_3 = 5 + 7 + 6 = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

### Результаты расчетов

Форма сечения	Сплошное	
Момент сопротивления	$W_{p,спл} = \frac{\pi D^3}{16}$	$W_{p,пол} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4)$
Диаметр из условия прочности	$D_{спл} \geq \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi}}$ $D_{спл} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}}{\pi}} = 0,0914 \text{ м}$	$D_{пол} \geq \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi(1 - c^4)}}$ $D_{пол} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}}{\pi \cdot (1 - c^4)}}$
Момент инерции требуемый	$I_{спл} = \frac{\pi D^4}{32}$	$I_{пол} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4)$
Диаметр из условия жесткости	$D_{спл} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot I_{спл}}{\pi}}$ $D_{спл} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,074 \cdot 10^{-5}}{\pi}} = 0,1023 \text{ м}$	$D_{пол} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot I_{пол}}{\pi(1 - c^4)}}$ $D_{пол} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,074 \cdot 10^{-5}}{\pi(1 - c^4)}}$
Диаметр согласно ГОСТ	$D_{спл} = 105 \text{ мм}$	$D_{пол} = 120 \text{ мм}$
Площадь поперечного сечения	$A_{спл} = \frac{\pi D_{спл}^2}{4}$ $A_{спл} = \frac{\pi}{4} 0,105^2 = 86,6 \text{ см}^2$	$A_{пол} = \frac{\pi D_{пол}^2}{4} (1 - c^4)$ $A_{пол} = \frac{\pi}{4} 0,120^2 (1 - c^4)$

**Углы закручивания характерных сечений вала сплошного и полн**

Момент инерции принятый	$I_{\text{спп}} = \frac{\pi D^4}{32};$ $I_{\text{спл}} = \frac{\pi \cdot 0,105^4}{32} = 1,193 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$	$I_{\text{пол}} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4)$ $I_{\text{пол}} = \frac{\pi 0,120^4}{32} (1 - c^4)$
Жесткость сечения	$G \cdot I_p = 80 \cdot 10^9 \cdot 1,19 \cdot 10^{-5} = 0,955 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$	$G \cdot I_p = 80 \cdot 10^9 \cdot 1,20 \cdot 10^{-5}$
Углы закручивания участков вала	$\varphi_I = \frac{T_I a}{G I_p} = \frac{-5 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{0,955 \cdot 10^6} = -0,00314;$ $\varphi_{II} = \frac{T_{II} b}{G I_p} = \frac{-12 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{0,955 \cdot 10^6} = -0,01005;$ $\varphi_{III} = \frac{T_{III} c}{G I_p} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{0,955 \cdot 10^6} = 0,00440$	$\varphi_I = \frac{T_I a}{G I_p} = \frac{-5 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{0,955 \cdot 10^6}$ $\varphi_{II} = \frac{T_{II} b}{G I_p} = \frac{-12 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{0,955 \cdot 10^6}$ $\varphi_{III} = \frac{T_{III} c}{G I_p} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{0,955 \cdot 10^6}$
Углы закручивания характерных сечений вала	$\beta_{\text{спл}e} = 0.$ $\beta_{\text{спл}f} = \varphi_I = -3,14 \cdot 10^{-3}.$ $\beta_{\text{спл}g} = \varphi_I + \varphi_{II} = -(3,14 + 10,05) \cdot 10^{-3} =$ $= -13,19 \cdot 10^{-3}.$ $\beta_{\text{спл}h} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} =$ $= -(3,14 + 10,05 - 4,40) \cdot 10^{-3} = -8,79 \cdot 10^{-3}$	$\beta_{\text{пол}e} = 0.$ $\beta_{\text{пол}f} = \varphi_I = -3,12 \cdot 10^{-3}.$ $\beta_{\text{пол}g} = \varphi_I + \varphi_{II} = -(3,12 + 9,99) \cdot 10^{-3} =$ $= -13,11 \cdot 10^{-3}.$ $\beta_{\text{пол}h} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} =$ $= -(3,12 + 9,99 - 4,40) \cdot 10^{-3} = -8,71 \cdot 10^{-3}$

**Результаты расчета валов**

Поперечное сечение вала	Наружный диаметр вала, мм			Площадь поперечного сечения, мм <sup>2</sup>	Угол закручивания крайнего сечения
	Из условия прочности	Из условия жесткости	Принято по ГОСТу		
Сплошное	91,4	102	105	8659	0,00879
Полое	109	116,7	120	4072	0,00874

### **Выводы:**

1. Из условий прочности и жесткости найдены диаметры вала двух вариантов исполнения, сплошного и пустотелого: 105 и 120 мм соответственно.

2. Вычислены деформации валов на каждом из участков, построены эпюры углов закручивания валов сплошного и пустотелого. Жесткости валов практически одинаковы.

### **• Литература:**

1. Архуша А.И. Техническая механика. Высшая школа 1983

2. Архуша А.И. Руководство к решению задач по технической механике.

Высшая школа 1971

3. Сборник задач по технической механике под ред. Г.М. Ицковича.

Судостроение 1973